

УДК 621.391

Синтез комплексных сигнальных фреймов Вейля — Гейзенберга с хорошей частотно-временной локализацией

Волчков В. П.

*Московский технический университет связи и информатики (МТУСИ)
ул. Авиамоторная, 8а, г. Москва, Россия, 111024, Российская Федерация
volchkovvalery@mail.ru*

Получено: 15 марта 2019 г.

Отрецензировано: 29 марта 2019 г.

Принято к публикации: 16 апреля 2019 г.

Аннотация: Для построения эффективных методов аппроксимации и спектрально-временного анализа различных процессов предлагается специальный инструментарий — комплексные сигнальные фреймы Вейля — Гейзенберга, позволяющие разлагать сигналы на компоненты, хорошо локализованные одновременно по времени и частоте. Выбранный критерий оптимальности обеспечивает построение плотного сигнального фрейма с наименьшим среднеквадратическим отклонением фреймовых функций от желаемого эталона. Кроме того, специальная алгебраическая структура алгоритма синтеза в виде произведения разреженных матриц допускает эффективную вычислительную реализацию и гибкую настройку частотно-временного разрешения сигнальных функций фрейма. Приводятся результаты эксперимента, подтверждающие эффективную вычислительную реализацию алгоритма и хорошую частотно-временную локализацию фреймовых функций. Разрабатывается алгебраический метод синтеза таких сигнальных фреймов для дискретных сигналов на конечном интервале, допускающий гибкую настройку частотно-временного разрешения и быструю вычислительную реализацию. Приводятся результаты вычислительного эксперимента, подтверждающие хорошие свойства полученных фреймов.

Ключевые слова: фрейм Вейля — Гейзенберга, синтез оптимальных плотных фреймов, хорошая частотно-временная локализация, сигнальный фрейм, эффективная вычислительная реализация, частотно-временное разрешение.

Для цитирования (ГОСТ 7.0.5—2008): Волчков В. П. Синтез комплексных сигнальных фреймов Вейля — Гейзенберга с хорошей частотно-временной локализацией // *Инфокоммуникационные и радиоэлектронные технологии*. 2019. Т. 2, № 1. С. 86—99.

Для цитирования (ГОСТ 7.0.11—2011): Волчков, В. П. Синтез комплексных сигнальных фреймов Вейля — Гейзенберга с хорошей частотно-временной локализацией / В. П. Волчков // *Инфокоммуникационные и радиоэлектронные технологии*. — 2019. — Т. 2, № 1. — С. 86—99.

Synthesis of complex Weyl–Heisenberg signal frames with good frequency-time localization

V. P. Volchkov

*Moscow Technical University of Communications and Informatics (MTUCI)
8a, Aviamotornaya Str., Moscow, 111024, Russian Federation
volchkovvalery@mail.ru*

Received: March 15, 2019

Peer-reviewed: March 29, 2019

Accepted: April 16, 2019

Abstract: *To build effective methods of approximation and spectral-temporal analysis of various processes, we propose special tools – complex Weyl–Heisenberg signal frames, which allow decomposing signals to components that are well localized simultaneously in time and frequency. The chosen optimality criterion ensures the construction of a tight signal frame with the lowest standard deviation of frame functions from the desired standard. In addition, a special algebraic structure of the synthesis algorithm in the form of a product of sparse matrices allows for efficient computational implementation and flexible adjustment of the frequency-time resolution of the signal functions of the frame. The results of the experiment confirming the effective computational implementation of the algorithm and a good time-frequency localization of frame functions are presented.*

Keywords: *Weil–Heisenberg frame, synthesis of optimal tight frames, good frequency-time localization, signal frame, effective computational implementation, frequency-time resolution.*

For citation (IEEE): V. P. Volchkov, “Synthesis of complex Weyl–Heisenberg signal frames with good frequency-time localization”, *Infocommunications and Radio Technologies*, vol. 2, no. 1, pp. 86–99, 2019. (In Russ.). doi: 10.15826/icrt.2019.02.1.08

1. Введение

Одной из важнейших задач современных интеллектуальных систем обработки информации является разработка эффективных методов и алгоритмов спектрально-временного анализа процессов, наблюдаемых на выходе различных устройств регистрации. В качестве таких устройств, например, могут выступать датчики биомедицинских приборов, приемники эхо сигналов в радиолокаторах (или гидролокаторах) различного назначения, сейсмографические датчики, системы мониторинга земной

поверхности и др. Вся получаемая при этом информация оцифровывается и запоминается, чтобы потом ее можно было обрабатывать или в реальном времени, или в отложенном режиме, с помощью специализированных алгоритмов.

Отличительной особенностью процессов на выходе перечисленных устройств является их нестационарность, что сильно затрудняет или ограничивает применение классических алгоритмов цифрового спектрального анализа. Кроме того, полезная информация, которую требуется извлечь из принимаемого сигнала, обычно носит многофакторный характер и для выявления всех его особенностей нужны гибкие многоуровневые алгоритмы частотно-временного анализа, способные быстро перестраиваться под конкретные задачи.

В работе предлагается использовать для этих целей так называемые фреймы Вейля — Гейзенберга (сокращенно WH -фреймы) — системы функций, обладающие хорошей частотно-временной локализацией. Общая теория WH -фреймов (в том числе дискретных) и связанная с ней теория расширений Габора изложена в [1—8]. В отличие от сигнальных базисов, используемых в классическом спектральном анализе, фреймовые функции, участвующие в таком представлении, могут быть неортогональными, а их общее число превышает по величине базу сигнала. В результате при разложении сигналов по функциям WH -фрейма возникает так называемое «перенасыщение» спектральными отсчетами, что позволяет обеспечить одновременно хорошую аппроксимацию сигнала и высокое частотно-временное разрешение отдельных его компонент.

В работе предлагается алгебраический подход к синтезу WH -фреймов, основанный на его оптимальной подгонке к желаемому эталону. В качестве эталона выбирается система комплексных функций из равномерно сдвинутых по времени и частоте импульсов с желаемым свойством симметрии, частотно-временным разрешением и диапазоном. Следуя терминологии [1—8], эталон с указанной структурой сдвигов представляет некоторую систему функций Габора. Однако такая система, обычно, не является плотным фреймом, а попытка разложить сигнал в линейную комбинацию эталонных функций представляет сложную задачу, которая не всегда имеет устойчивое решение и необязательно и приводит к хорошей аппроксимации.

Для преодоления этого недостатка, в работе решается задача синтеза плотного комплексного сигнального WH -фрейма, обладающего желаемыми свойствами эталона, а величина его отклонения от эталона минимизируется по среднеквадратическому критерию. В этом смысле полученный

WH-фрейм является оптимальным, а разложения сигналов по данному фрейму обладают вычислительной устойчивостью.

Показано, что синтез плотного WH-фрейма связан с процедурой диагонализации фреймового оператора, а алгоритм его оптимальной подгонки к эталону представляет линейный матричный оператор, факторизуемый в произведение разреженных матриц. Это позволяет обеспечить быструю вычислительную реализацию алгоритма идентификации WH-фрейма и гибкую настройку его частотно-временного разрешения, меняя параметры эталона.

Отметим, что полученные результаты можно рассматривать как обобщение и развитие результатов по оптимизации комплексных WH-базисов, описанных в работах [9—13], на случай жестких комплексных фреймов. Приводятся результаты вычислительного эксперимента, подтверждающие хорошие свойства полученных дискретных фреймов

2. Математическая формализация задачи и ее решение

Будем считать, что регистрируемые сигналы $s(t), t \in \mathbb{R}$ являются полосовыми, а их низкочастотные эквиваленты локализованы в полосе частот $\Delta_f = [0, W]$ и во временном слоте $\Lambda_t = [0, T_o]$. Тогда на выходе квадратурной схемы дискретизации получим дискретные отсчеты комплексной огибающей $\dot{s}[n] = \dot{s}(n/W) \in \mathbb{C}$, $n \in J_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$, следующие с частотой $f_d = W$ и количество которых равно $N = \lfloor T_o W \rfloor$.

Пусть непрерывный формирующий импульс $g(t), t \in \mathbb{R}$ желаемой фреймовой системы является четной функцией, имеет эффективную длительность T и ширину полосы $F = 1/T$, а количество используемых базовых частотных и временных сдвигов равно M и L , соответственно. Тогда произведение $N = M \cdot L \geq M$ определяет общее число базовых элементов частотно-временного разрешения, перекрывающих заданные частотный диапазон $\Delta_f = [0, W]$, $W = M/T$ и временной диапазон $\Lambda_t = [0, T_o]$, $T_o = LT$. С учетом этого, после дискретизации на интервале Λ_t формирующий импульс фрейма принимает вид $g[n] = g(n/f_d)$, $n \in J_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$, а для адекватного описания временных сдвигов и свойства четности на конечном дискретном интервале $J_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$, выполним дополнительную циклическую редукцию

$$g_{ep}[n] = (g[(n)_{[N]}] + g[(-n)_{[N]}]) / 2, \quad n \in J_N, \quad (1)$$

где $(n)_{[N]} = n \pmod{N}$ — модуль числа $n \in J_N$ по основанию N . В результате $g_{ep}[n]$ будет удовлетворять условию N -периодичности и N -симметрии относительно точки 0.

$$g_{ep}[n] = g_{ep}[qN + n], \quad g_{ep}[n] = g_{ep}[-n], \quad \forall n \in J_N, q \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Пусть коэффициент перенасыщения отсчетами $P \geq 2$ — четное натуральное число, M кратно P , $L_o = M / P$, $K = LP$, тогда с учетом введенных обозначений желаемая эталонная система дискретных комплексных функций Габора на конечном дискретном временном интервале J_N описывается выражениями:

$$\mathbf{G} = (\mathbf{G}^{(0)}, \dots, \mathbf{G}^{(NP)}) = (\Phi_{m,l}[n]), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{k,l}[n] &= g_{ep}[n - lL_o] \exp(j2\pi mn / M), \\ n &\in J_N, \quad m \in J_M, \quad l \in J_K, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\mathbf{G} = (G(v, \mu))$, $v \in J_N, \mu \in J_{PN}$ представляет вещественную прямоугольную матрицу размерности $N \times PN$, в которой по векторам-столбцам $\mathbf{G}^{(\mu)} = [\Phi_{m,l}(0), \dots, \Phi_{m,l}(N-1)]^T$ при фиксированных значениях m, l стоят вектор-функции $\Phi_{m,l} = \{\Phi_{m,l}[n], n \in J_N\}$, имеющие размерность N . Индексы $m \in J_M$ определяют базовые сдвиги по частоте, а индексы $l \in J_K$ — фреймовые сдвиги по времени, учитывающие коэффициент перенасыщения P . Их общее число равно $K = LP > L$, т.е. в P раз превышает количество базовых временных сдвигов L . Размерность вещественного сигнального пространства, натянутого на комплексную систему эталонных функций $\mathbf{G} = \{(\Phi_{m,l}), m \in J_M, l \in J_K\}$, равна $N_o = 2N$. Общее число фреймовых функций равно $N_- = PN \geq N_o$. Из (3)—(4) следует, что в матричной структуре $\mathbf{G} = (G(v, \mu))$ индексы элементов (v, μ) связаны с переменными фрейма (m, l, n) выражениями:

$$\begin{aligned} v &= n, \quad \mu = (l + mK) \\ v, \mu &\in \{0, \dots, N-1\}, \quad m \in \{0, \dots, M-1\}, \quad l \in \{0, \dots, K-1\} \end{aligned}$$

Величина $N_- = M \cdot K$ определяет общее число элементов частотно-временного разрешения, а параметры F, T импульса (1) задают разреша-

ющую способность эталонной системы \mathbf{G} по частоте и времени, соответственно.

На рис. 1 изображено сечение эталонной системы \mathbf{G} горизонтальной плоскостью. Видно, что в плоскости время — частота функции $\Phi_{m,l}(\cdot)$ равномерно распределены с указанными выше сдвигами. Ниже на рис. 2 представлено трехмерное изображение функции неопределенности одной из эталонных функций, позволяющее судить о частотно-временной локализации в разных сечениях.

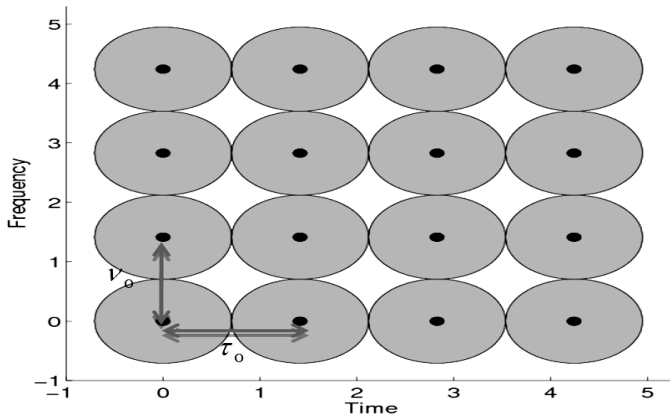


Рис. 1. Сечение эталонной системы горизонтальной плоскостью.

Fig. 1. Horizontal plane of reference system

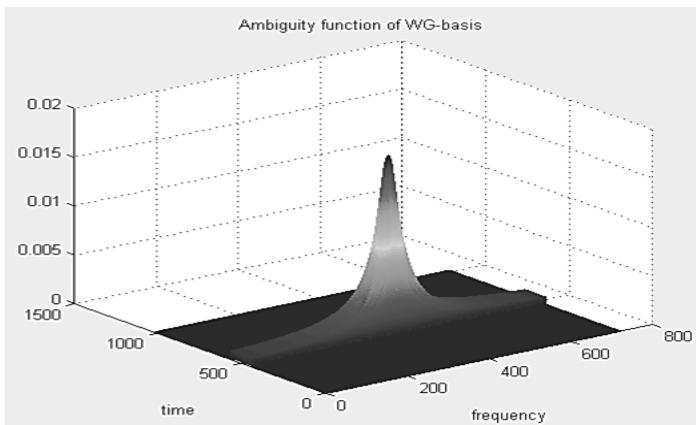


Рис. 2. Трехмерное изображение функции неопределенности эталона.

Fig. 2. Three-dimensional image of the reference ambiguity function

Для лучшего понимания постановки задачи, используемой терминологии и обозначений напомним ряд определений из теории фреймов, применительно дискретным вещественным конечномерным пространствам.

Обозначим через $\mathcal{M}_{m,n}$ множество всех комплексных матриц размера $m \times n$. Если $m = n$, будет использоваться сокращенная запись \mathcal{M}_n . Согласно [2], система дискретных функций $\mathbf{G} = (\mathbf{G}^{(0)}, \dots, \mathbf{G}^{(N-1)}) \in \mathcal{M}_{N,N}$ со структурой описанных выше частотно-временных сдвигов называется WH-фреймом, если для любого комплексного сигнального вектора $\mathbf{s} = (s[0], \dots, s[N-1])^T \in \mathbb{C}^N$, выполняется неравенство

$$A \|\mathbf{s}\|^2 \leq \|\mathbf{G}^* \mathbf{s}\|^2 \leq B \|\mathbf{s}\|^2,$$

где $0 < A \leq B < \infty$ называются границами фрейма, $\|\cdot\|$ — евклидова норма, $(\cdot)^*$ — оператор эрмитового сопряжения матриц. Если $A = B$, то фрейм \mathbf{G} называется плотным, если $A = B = 1$ и $\|\mathbf{G}^{(\mu)}\| = 1, \forall \mu$, то \mathbf{G} образует ортонормированный сигнальный WH-базис. Прямоугольная матрица $\mathbf{G}^* \in \mathcal{M}_{N,N}$ описывает фреймовый оператор, а его действие на сигнал $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^N$ приводит к вектору

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}^* \mathbf{s} \in \mathbb{C}^N,$$

который в инженерной трактовке описывает фреймовый частотно-временной спектр.

Для большинства практических приложений фреймовые функции $\mathbf{G}^{(\mu)} \in \mathbb{C}^N, \mu \in J_{N-1}$ должны обладать подходящей частотно-временной локализацией, чтобы соответствующий фреймовый спектр позволял выделить в сигнале его характерные особенности. Эти дополнительные требования к WH-фрейму мы будем определять, как желаемые или эталонные.

Отметим, что в алгебраической трактовке процедура восстановления сигнала $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^N$ по его фреймовому спектру описывается выражением

$$\mathbf{s} = \mathbf{G}\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{G}^* \mathbf{s}$$

и оказывается возможной, если квадратная эрмитовая матрица $\mathbf{B} = \mathbf{G}\mathbf{G}^* \in \mathbb{C}^{N \times N}$ является единичной. Это означает, для точного восстановления прямоугольная матрица эталона \mathbf{G} должна состоять из ортонормированных строк и образовывать плотный фрейм с границами $A = B = 1$, что, однако, с учетом приведенного выше построения (3—4) не

гарантируется. Поэтому все дальнейшие построения будут сводиться к нахождению плотного WH-фрейма \mathbf{U}_{opt} с единичными границами, который наилучшим образом приближает желаемый эталон \mathbf{G} . При этом будем предполагать, что матрица $\mathbf{B} = \mathbf{G}\mathbf{G}^*$ — положительно определена, что на практике всегда выполняется.

Определим множество комплексных прямоугольных матриц с ортонормированными строками $\mathfrak{A}_{N,N_-} = \{\mathbf{U} \in \mathcal{M}_{N,N_-} : \mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{I}_{N_-}, N_- \geq N\}$ и множество комплексных унитарных матриц $\mathfrak{A}_N = \{\mathbf{U} \in \mathcal{M}_N : \mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{I}_N\}$.

Для любой $\forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_{N,N_-}$ матричную норму обозначим $\|\mathbf{A}\|_E = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)}$.

Тогда задача синтеза матрицы оптимального плотного WH-фрейма $\mathbf{U}_{opt} \in \mathfrak{A}_{N,N_-}$ по заданному эталону $\mathbf{G} \in \mathcal{M}_{N,N_-}$ (3—4) может быть сведена к решению экстремальной задачи

$$\mathbf{U}_{opt} : \min_{\mathbf{U} \in \mathfrak{A}_{N,N_-}} \|\mathbf{G} - \mathbf{U}\|_E^2, \quad (5)$$

т.е. среди всех матриц $\mathbf{U} \in \mathfrak{A}_{N,N_-}$ ищется наиболее близкая по матричной норме к эталону \mathbf{G} . Решение этой задачи (5) сформулируем в виде теоремы 1, доказательство которой, справедливое для произвольной прямоугольной матрицы, строится по методике, описанной в [10, 11].

Теорема 1. Оптимальный WH-фрейм $\mathbf{U}_{opt} \in \mathfrak{A}_{N,N_-}$, наилучшим образом приближающий желаемый эталон $\mathbf{G} \in \mathcal{M}_{N,N_-}$ по среднеквадратическому критерию (5), описывается выражением

$$\mathbf{U}_{opt} = \mathbf{S} \mathbf{W}^*, \quad (6)$$

где $\mathbf{S} \in \mathfrak{A}_N$, $\mathbf{W}^* \in \mathfrak{A}_{N,N_-}$ матрицы, входящие в сингулярное разложение $\mathbf{G} = \mathbf{S}\mathbf{\Sigma}\mathbf{W}^*$ с диагональной матрицей $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N\}$, состоящей из N сингулярных чисел $\sigma_i > 0$ матрицы \mathbf{G} .

Отметим, что комплексные матрицы \mathbf{S}, \mathbf{W}^* определяются в (6) неоднозначно, а разные их варианты могут отличаться перестановкой столбцов и фазовыми сдвигами элементов. Однако набор соответствующих сингулярных чисел в матрице $\mathbf{\Sigma}$ постоянен и может меняться только их порядок.

Далее покажем, что матрицы \mathbf{S}, \mathbf{W} могут быть найдены в явном виде без использования процедуры сингулярного разложения, причем алгоритм их нахождения допускает эффективную вычислительную реализацию. Это оказывается возможным благодаря специальной структуре матрицы эталона (3—4), при которой каждый ее столбец $\mathbf{G}^{(u)}$ может быть получен из первого столбца $\mathbf{G}^{(0)}$ путем соответствующих циклических сдвигов по времени и частоте.

Определим блочно-диагональную унитарную матрицу

$$\mathbf{F} = \mathbf{I}_{L_o} \otimes \mathbf{F}_o, \quad \mathbf{F}_o = K^{-1/2} \left(\exp(j2\pi pq / K) \right)_{p,q \in J_K}, \quad K = PL = N / L_o \quad (7)$$

размерности $(N \times N)$ (\otimes — оператор прямого произведения матриц), в которой по диагонали стоят унитарные матрицы Фурье \mathbf{F}_o размерности $(K \times K)$, и сформируем ортогональную матрицу перестановки $\mathbf{P} \in \mathfrak{A}_N$:

$$\mathbf{P} = (P(i, j))_{i,j \in J_N}, \quad P(i, j) = \begin{cases} 1, & j = L_o i_{[K]} + \lfloor i / K \rfloor, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (8)$$

где $a_{[n]} = a \pmod n$ — значение числа a по модулю n , $\lfloor \cdot \rfloor$ — оператор взятия целой части числа с округлением в меньшую сторону, и на основе (7)—(8) составим мультипликативную композицию матриц

$$\mathbf{S} = \mathbf{P}^T \mathbf{F} \quad (9)$$

Тогда, если выполнить над матрицей $\mathbf{B} = \mathbf{G}\mathbf{G}^*$ преобразование подобия

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{S}^* \mathbf{B} \mathbf{S}, \quad (10)$$

можно доказать следующую теорему о диагонализации.

Теорема 2. Преобразование унитарного подобия (10) с матрицей (9) является диагоналирующим для эрмитовой матрицы \mathbf{B} и приводит к матрице $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\} \in \mathcal{M}_N$, в которой на диагонали стоят собственные числа $[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]^T = \boldsymbol{\lambda}$ матрицы \mathbf{B} . Все собственные числа $\lambda_i > 0$ положительны, имеют кратность не меньше P и могут быть получены из значений $g_{ep}[n]$, $n \in J_N$, формирующего импульса (1) по следующей формуле

$$\begin{aligned} \lambda &= \sqrt{K} \mathbf{F}^* \tilde{\mathbf{b}}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = (\tilde{\mathbf{b}}_0^T, \dots, \tilde{\mathbf{b}}_{L_o-1}^T)^T \in \mathbb{C}^{L_o}, \\ \tilde{\mathbf{b}}_l &= (\tilde{b}_l[0], \dots, \tilde{b}_l[K-1])^T \in \mathbb{C}^K, \\ \tilde{b}_l[i] &= \begin{cases} M \sum_{l=0}^{K-1} g_{ep}[lL_o + p'] g_{ep}[(i+l)_{[K]} L_o + p'], & i \in J_K \text{ \& } i_{[P]} = 0 \\ 0, & i \in J_K \text{ \& } i_{[P]} \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

По сути дела, теорема 2 определяет явный вид матрицы $\mathbf{S} = \mathbf{P}^T \mathbf{F}$, входящей в выражение (6). При этом диагональная матрица сингулярных чисел из теоремы 1 равна

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Lambda}^{1/2} = \text{diag}\{\lambda_1^{1/2}, \lambda_2^{1/2}, \dots, \lambda_N^{1/2}\}. \quad (12)$$

Из теорем 1—2 можно теперь получить явные формулы для нахождения матриц $\mathbf{W} \in \mathfrak{A}_{N,N}$, \mathbf{U}_{opt} входящих в (6) и тем самым решить задачу построения оптимального WH-фрейма. Данный результат сформулируем в виде теоремы

Теорема 3. Матрица оптимального WH-фрейма (6) может быть вычислена по формулам

$$\mathbf{U}_{opt} = \mathbf{H}\mathbf{G}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{P}^T \mathbf{F} \mathbf{\Sigma} \mathbf{F}^* \mathbf{P}, \quad (13)$$

где \mathbf{H} определяет матричный оператор оптимальной подгонки к желаемой эталонной системе функций \mathbf{G} ; диагональная матрица $\mathbf{\Sigma}$ вычисляется по формулам (11), (12); матрицы \mathbf{P}, \mathbf{F} явно задаются формулами (7), (8).

Из теоремы 3 следует, что матричный оператор \mathbf{H} факторизуется в произведение разреженных матриц $\mathbf{\Sigma}, \mathbf{F}, \mathbf{P}$, а значит алгоритм нахождения оптимального WH-фрейма (13) является вычислительно эффективным. Структура разреженных матриц, входящих в алгоритм подгонки (13), более подробно исследуется ниже.

3. Результаты эксперимента

На рис. 3 приводятся результаты вычислительного эксперимента, в процессе которого для выбранных параметров $P = 4, L = 2, M = 24, N = 48$ и формирующего импульса (1) желаемого эталона \mathbf{G} рассчитывались матрицы $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{H}$ входящие в (13). Структура этих матриц отображается в виде точек, характеризующих ненулевые элементы, а внизу каждого изображения матрицы указано общее число pz ее ненулевых элементов. Анализ структуры показывает, что не только каждый из сомножителей \mathbf{P} ,

\mathbf{Q} , $\mathbf{\Lambda}$ в (13) является разреженной матрицей, но и их произведение — матрица \mathbf{H} тоже сильно разрежена. Данный факт представляет самостоятельный интерес, поскольку в общем случае произведение разреженных матриц не обязано быть разреженной матрицей. Все это позволяет обеспечить быструю вычислительную реализацию алгоритма идентификации WH-фрейма, а значит и гибкую настройку частотно-временного разрешения в процессе подгонки параметров эталона \mathbf{G}

На рисунках 4—5 представлены результаты вычислительного эксперимента оптимального WH-фрейма (13) для значений $L=8$, $M=16$, $P=4$, позволяющие на конкретном примере оценить частотно-временную локализацию трех соседних по времени и частоте фреймовых функций, входящих в матрицу \mathbf{U}_{opt} , а также сравнить их с одним из импульсов эталонной системы \mathbf{G} и прямоугольным импульсом, имеющим аналогичную эффективную длительность.

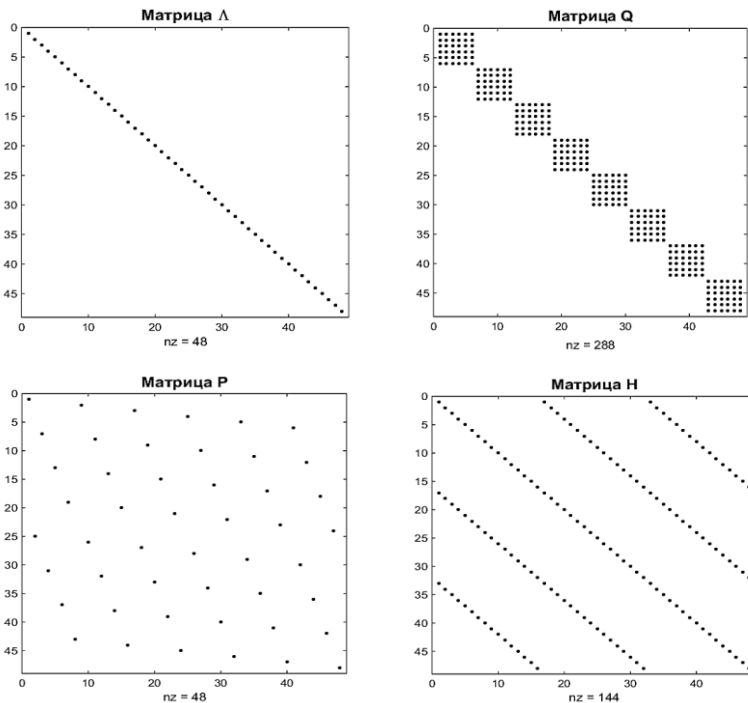


Рис. 3. Структура разреженных матриц, входящих в (13).

Fig. 3. The structure of sparse matrices included in (13)

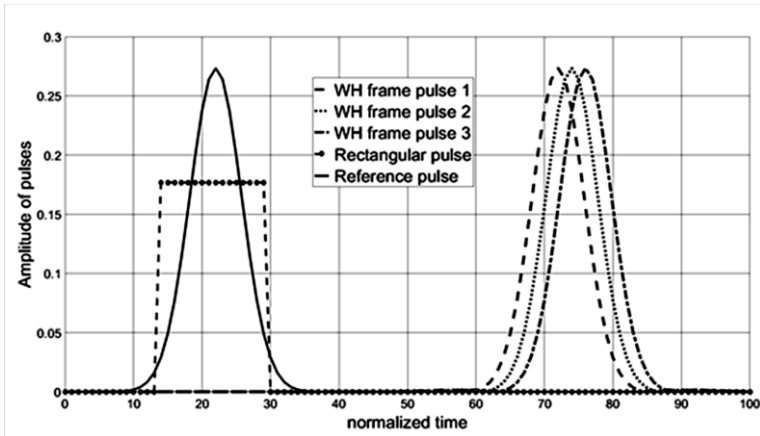


Рис. 4. Импульсы оптимального WH-фрейма.

Fig. 4. Pulses of the optimal WH-frame

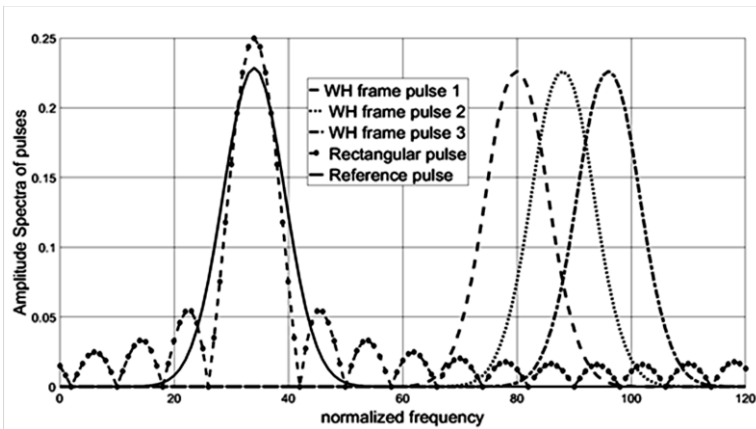


Рис. 5. Спектры импульсов оптимального WH-фрейма

Fig. 5. Spectra pulses of the optimal WH-frame

На рис. 4 импульсы оптимального WH-фрейма для любого его столбца $\mathbf{U}_{opt}^{(\mu)}$ строятся как модули отсчетов этого столбца. Аналогично строятся импульсы, отвечающие любому столбцу $\mathbf{G}^{(\mu)}$ эталона. Спектры импульсов оптимального WH-фрейма \mathbf{U}_{opt} и эталона \mathbf{G} определяются как дискретное преобразование Фурье от этих импульсов, а на рис. 5 изображены модули этих спектров.

Анализ графиков рис. 4—5 показывает, что импульсы WH-фрейма очень близки по форме к желаемым импульсам эталона и хорошо локализованы по времени и по частоте, позволяя обеспечить требуемые характеристики частотно-временного разрешения.

4. Заключение

1) Решена задача синтеза комплексных сигнальных WH-фреймов, обладающих желаемыми свойствами. При этом выбранный критерий качества минимизирует величину его отклонения от желаемого эталона по среднеквадратическому критерию и значительно упрощает структуру последующих решений.

2) На основе алгебраического подхода синтезирован алгоритм идентификации плотного комплексного WH-фрейма, основанный на его оптимальной подгонке к желаемому эталону, в виде комплексной системы равномерно сдвинутых по времени и частоте импульсов с желаемым свойством симметрии, частотно-временным разрешением и диапазоном.

3) Показано, что разработанный векторно-матричный алгоритм идентификации WH-фрейма представляется в виде произведения разреженных матриц, что позволяет обеспечить его быструю вычислительную реализацию в объектно-ориентированных средах программирования с алгеброй разреженных матриц.

4) Анализ результатов вычислительного эксперимента показывает, что импульсы оптимального WH-фрейма очень близки по форме к желаемым импульсам эталона и хорошо локализованы по времени и по частоте, позволяя обеспечить требуемые характеристики частотно-временного разрешения.

Список литературы

1. Gabor D. Theory of communication // J. Inst. Elect. Eng. (London). 1946. Т. 93, № 111. С. 429—457.
2. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 464 с.
3. Wexler J., Raz S. Discrete Gabor expansions // Signal Processing. 1990. Т. 21. С. 207—220.
4. Zibulski M., Zeevi Y. Y. Frame analysis of the discrete Gabor-scheme // IEEE Trans. Signal Processing. 1994. Т. 42. С. 942—945.
5. Qian S., Chen K., Li S. Optimal biorthogonal functions for finite discrete-time Gabor expansion // Signal Processing. 1992. Т. 27. С. 177—185.
6. Augustus J. E., Janssen M., Bolcskei H. Equivalence of Two Methods for Constructing Tight Gabor Frames // IEEE Signal Processing Letters. 2000. Т. 7, № 4. С. 79—82.
7. Bolcskei H., Feichtinger H. G., Hlawatsch F. Diagonalizing the Gabor frame operator // Proc. IEEE UK Symp. Applications Time-Frequency Time-Scale Methods. Univ. Warwick, Coventry, U. K., Aug. 1995. С. 249—255.

8. Kozek W., Molish A. F. Robust and efficient multicarrier communication by nonorthogonal Weyl–Heisenberg systems // IEEE J. Sel. Areas Comm. 1996. Т. 16, С. 1579—1589.
9. Siohan P., Siclet C., Lacaille N. Analysis and design of OFDM/OQAM systems based on filterbank theory // IEEE Trans. on Signal Processing. 2002. Т. 50, № 5. С. 1170—1183.
10. Волчков В. П. Сигнальные базисы с хорошей частотно-временной локализацией // Электросвязь. 2007. № 2. С. 21—25.
11. Volchkov V. P., Petrov D. A. Orthogonal Well-Localized Weyl–Heisenberg Basis Construction and Optimization for Multicarrier Digital Communication Systems // Proc. of ICUMT, St. Petersburg, Oct. 2009.
12. Волчков В. П. Новые технологии передачи и обработки информации на основе хорошо локализованных сигнальных базисов // Научные ведомости БелГУ. Серия «История. Политология. Экономика. Информатика». 2009. № 15 (70), вып. 12/1. С.181—189.
13. Volchkov V. P., Sannikov V. G. Algebraic approach to the optimal synthesis of real signal Weyl–Heisenberg bases. В кн. : IEEE Conference # 43613, 2018 Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO), Minsk, Belarus, 4—5 July 2018. С. 135—142.

Информация об авторах

Волчков Валерий Павлович, доктор технических наук, профессор кафедры общей теории связи Московского технического университета связи и информатики «МТУСИ», г. Москва, Российская Федерация.

Information about the authors

Valery P. Volchkov, Doctor of technical sciences (Eng.), Professor of the Department of Fundamentals of the General Theory of Communication of the Moscow Technical University of Communications and Informatics “MTUCI”, Moscow, Russian Federation.