

УДК 621.391

Синтез комплексных дуальных фреймов Вейля — Гейзенберга для спектрального анализа нестационарных сигналов¹

¹ Волчков В. П., ² Санников В. Г.

^{1,2} *Московский технический университет связи и информатики (МТУСИ)*
ул. Авиаторная, 8а, г. Москва, 111024, Российская Федерация
¹volchkovvalery@mail.ru, ²tes_mtuci@mail.ru

Получено: 22 июля 2019 г.

Отрецензировано: 13 сентября 2019 г.

Принято к публикации: 16 сентября 2019 г.

Аннотация: Для спектрально-временного анализа различных нестационарных процессов предлагается использовать специальный инструментарий — дуальные комплексные фреймы Вейля — Гейзенберга, позволяющие разлагать сигналы на хорошо локализованные по времени и частоте фрагменты с возможностью более детального спектрального анализа сигнала в каждом выделенном временном окне. Разрабатывается алгебраический метод синтеза таких дуальных фреймов для дискретных сигналов на конечном интервале, допускающий гибкую настройку частотно-временного разрешения и быструю вычислительную реализацию. Приводятся результаты вычислительного эксперимента, подтверждающие хорошие свойства полученных фреймов для задач обнаружения-различения.

Ключевые слова: дуальный комплексный фрейм Вейля — Гейзенберга, синтез оптимальных фреймов, хорошая частотно-временная локализация, сигнальный фрейм, эффективная вычислительная реализация, частотно-временное разрешение.

Для цитирования (ГОСТ 7.0.5—2008): Волчков В. П., Санников В. Г. Синтез комплексных дуальных фреймов Вейля — Гейзенберга для спектрального анализа нестационарных сигналов // *Инфокоммуникационные и радиоэлектронные технологии*. 2019. Т. 2, № 4. С. 503—514.

Для цитирования (ГОСТ 7.0.11—2011): Волчков, В. П. Синтез комплексных дуальных фреймов Вейля-Гейзенберга для спектрального анализа нестационарных сигналов / В. П. Волчков, В. Г. Санников // *Инфокоммуникационные и радиоэлектронные технологии*. — 2019. — Т. 2, № 4. — С. 503—514.

¹ Статья является расширенной версией доклада, представленного на 29-й Международной Крымской конференции «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии» — КрыМиКо'2019 (Севастополь, РФ, 8—14 сентября 2019 г.).

Synthesis of complex dual frames Weil–Heisenberg for spectral analysis of non-stationary signals

V. P. Volchkov and V. G. Sannikov

*Moscow Technical University of Communications and Informatics (MTUCI)
8a, Aviamotornaya Str., Moscow, 111024, Russian Federation
volchkovvalery@mail.ru*

Received: July 22, 2019

Peer-reviewed: September 13, 2019

Accepted: September 16, 2019

Abstract: *For spectral-temporal analysis of various non-stationary processes, it is proposed to use special tools – Weil–Heisenberg dual complex frames, which allow decomposing signals into fragments well-localized in time and frequency with the possibility of a more detailed spectral analysis of the signal in each selected time window. An algebraic method is being developed for the synthesis of such dual frames for discrete signals on a finite interval, allowing flexible tuning of the time-frequency resolution and fast computational implementation. The results of a computational experiment are presented, confirming the good properties of the obtained frames for detection-discrimination problems.*

Keywords: *Weil–Heisenberg dual complex frame, optimal frame synthesis, good frequency-time localization, signal frame, efficient computational implementation, frequency-temporal resolution.*

For citation (IEEE): V. P. Volchkov and V. G. Sannikov, “Synthesis of complex dual frames Weil–Heisenberg for spectral analysis of non-stationary signals”, *Infocommunications and Radio Technologies*, vol. 2, no. 4, pp. 503–514, 2019. (In Russ.).

1. Введение

Одной из важнейших задач современных интеллектуальных систем обработки информации является разработка эффективных методов и алгоритмов спектрально-временного анализа процессов, наблюдаемых на выходе различных устройств цифровой регистрации. Такие процессы часто являются нестационарными, что сильно затрудняет или ограничивает применение классических алгоритмов цифрового спектрального анализа, основанных на дискретном преобразовании Фурье (ДПФ). Эффективным методом преодоления этих недостатков является переход разложениям

сигналов по системам функций, которые хорошо локализованы по времени и частоте, но при этом не обязательно являются ортогональными [1—10]. В [11—12] для этих целей предлагается использовать так называемые фреймы Вейля — Гейзенберга (сокращенно WH-фреймы).

Данная работа посвящена дальнейшему развитию фреймового подхода к проблеме спектрально-временного анализа нестационарных сигналов на основе, так называемых дуальных WH-фреймов (сокращенно DWH-фреймов) с хорошей частотно-временной локализацией. Важная отличительная особенность этих фреймов от тех, которые предлагались ранее, состоит в том, что теперь в каждом выделенном временном окне детализация спектра анализируемого сигнала по частоте может быть увеличена за счет уменьшения шагов частотной сетки при том же диапазоне анализируемых частот и количестве дискретных отсчетов сигнала, полученных с устройства регистрации. Такое уменьшение частотной сетки частот (при той же или большей разрешающей способности WH-фрейма по частоте) можно рассматривать как процедуру дополнительной спектральной интерполяции, которая в обычном WH-фрейме отсутствует. Кратность уменьшения частотной сетки и частотно-временная локализация фреймовых функций определяются коэффициентом $P \geq 2$ пересыщения спектральными отсчетами, который входит в описание дуального WH-фрейма в качестве параметра. Из общей теории фреймов известно, что благодаря такому «перенасыщению» спектральными отсчетами можно обеспечить одновременно хорошую аппроксимацию сигнала и высокое частотно-временное разрешение отдельных его компонент, что говорит об актуальности и практической значимости фреймового представления сигналов для интеллектуальных систем обработки информации.

В частности, при классическом ДПФ спектральном анализе сигналов на фоне детерминированных помех и шума может складываться ситуация, когда соседняя мощная помеха и шум просачиваются в соседние частотные бины, «забывая» близлежащие спектральные составляющие сигнала. В результате спектральные оценки сигнала оказываются недостоверными — наблюдается их смещение, маскировка или подавление. В этой ситуации помеха может быть существенно отсеleктирована, а шум подавлен, если использовать специальный банк фильтров с хорошим частотно-временным разрешением. Именно такие банки и предлагается строить на базе дуальных фреймов. Разрабатывается алгебраический метод синтеза дуальных фреймов для дискретных сигналов на конечном интервале, допускающий гибкую настройку частотно-временного разрешения и быструю вычислительную реализацию. Приводятся результаты вычислитель-

ного эксперимента, подтверждающие хорошие свойства полученных фреймов и возможность их применения для борьбы с помехами и шумами.

2. Математическая формализация задачи и ее решение

Любой банк цифровых фильтров, предназначенный для частотно-временного анализа сигналов, может быть синтезирован на основе теории полифазных разложений [13]. Однако такой подход к синтезу обычно предполагает, что входной дискретный сигнал имеет вид бесконечной последовательности, что на практике обычно не выполняется. Реально приходится иметь дело с конечными пакетами дискретных сигналов, полученными в результате дискретизации непрерывных сигналов на конечном интервале времени Δ_t и занимающих частотный диапазон Δ_f . Кроме того, метод полифазных разложений предполагает, что формирующий импульс банка фильтров выбран, обладает нужными свойствами, однако процедура его нахождения мало конструктивна и порой требует больших вычислительных затрат. Альтернативой полифазному методу является подход, основанный на синтезе оптимальных дискретных WH-фреймов по желаемому эталону Габора [11—12]. Главные его достоинства: с одной стороны математическая строгость, непосредственно вытекающая из прикладной теории матричного анализа, с другой — простота математического инструментария и разнообразие возможностей применения в различных приложениях из-за возможности быстрой вычислительной реализации получаемых алгоритмов.

Рассматриваемые ниже дуальные WH-фреймы отличаются от обычных тем, что в них частота и время формально меняются местами. В результате все достоинства, связанные с пересыщением временных сдвигов в классическом WH-фрейме, переносятся на частотную область, позволяя получать более гибкие и эффективные алгоритмы спектральной обработки.

В дальнейшем будут рассматриваться дуальные комплексные WH-фреймы на конечном дискретном интервале времени. Учитывая указанную инверсию временных и частотных параметров, синтез дуальных комплексных WH-фреймов будет во многих чертах повторять схему построения обычных комплексных фреймов, описанную в [11]. Поэтому приведем ее в более кратком изложении, делая акцент на отличиях, приводящих к новым особенностям.

Предполагается, что исходный непрерывный формирующий импульс $g(t), t \in \mathbb{R}$ желаемой DWH-фреймовой системы является четной функцией, имеет эффективную длительность T и ширину полосы

$F = 1/T$, количество используемых базовых частотных и временных сдвигов равно M и L , соответственно. Тогда произведение $N = ML \geq M$ определяет общее число базовых элементов частотно-временного разрешения, перекрывающих временной диапазон $\Delta_t = [0, T_o]$, $T_o = LT$ и частотный диапазон $\Delta_f = [0, W]$, $W = MF$. Если анализируемые сигналы являются комплексными, частота дискретизации в системе выбирается равной $f_d = W$, а общее число дискретных временных отсчетов, укладываемых в диапазоне Δ_t , будет равно $T_o f_d = ML = N$. С учетом этого после дискретизации и циклической редукции формирующий импульс фрейма принимает вид

$$g_c[n] = (g[(n)_{[N]}] + g[(-n)_{[N]}]) / 2, \quad n \in J_N = \{0, 1, \dots, N-1\}, \quad (1)$$

где $g[n] = g(n/f_d)$, $(n)_{[N]} = n \pmod{N}$ — модуль числа $n \in J_N$ по основанию N . Определим фреймовый параметр — коэффициент перенасыщения частотными сдвигами, как натуральное число $P \geq 2$, делящее L , $M_o = MP > M$ — количество фреймовых сдвигов по частоте, превышающее число базовых частотных сдвигов M . Тогда желаемая дуальная WH-система дискретных комплексных функций Габора на конечном дискретном интервале $J_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$ описывается выражениями

$$\mathbf{G} = (\mathbf{G}(i, \mu)) = (\mathbf{G}^{(0)}, \dots, \mathbf{G}^{(NP)}) = (\Phi_{k,l}[n]), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{k,l}[n] &= g_c[n - lM] \exp(j2\pi kn / M_o), \\ n \in J_N, \quad k \in J_{M_o}, \quad l \in J_L, \end{aligned} \quad (3)$$

Согласно (2—3), эталонная система Габора представляет матрицу \mathbf{G} размерности $(N \times NP)$, в которой по столбцам $\mathbf{G}^{(\mu)} = [\Phi_{k,l}(0), \dots, \Phi_{k,l}(N-1)]^T$ стоят сдвинутые по времени и частоте импульсы $g_c[n]$. Однозначная связь $\mu = \psi(l, k)$ между одномерной индексацией $\mu \in J_{NP}$ и двухмерной $(l, k) \in J_L \times J_{M_o}$ задает закон упорядоченности функций внутри WH-системы (3) и может варьироваться.

Параметр $k \in J_{M_o}$ определяет сдвиги по частоте, параметр $l \in J_L$ — сдвиги по времени. Общее таких дискретных функций (импульсов) в системе (3) равно $N_- = PN \geq N$, т. е. превышает комплексную размерность N -сигнального пространства $\mathcal{L}(\mathbf{G}) = \mathbb{C}^N$, натянутого на систему функций

\mathbf{G} . Однако это не мешает разложению любого дискретного комплексного сигнала $\mathbf{s} = [s_1, \dots, s_N]^T \in \mathbb{C}^N$ по системе функций \mathbf{G}

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}^* \mathbf{s} \in \mathbb{C}^N \quad (4)$$

и его обратному восстановлению по коэффициентам \mathbf{x}

$$\mathbf{s} = \mathbf{G}\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{G}^* \mathbf{s} \in \mathbb{C}^N, \quad (5)$$

если эта система является жестким (плотным) фреймом, т. е. удовлетворяет условию

$$\|\mathbf{G}^* \mathbf{s}\|^2 = A \|\mathbf{s}\|^2,$$

где $A > 0$ — граница фрейма, $\|\cdot\|$ — евклидова норма, $(\cdot)^*$ — оператор эрмитового сопряжения матриц. Согласно инженерной трактовке вектор (4) описывает так называемый фреймовый частотно-временной спектр сигнала. Если эталонная система (2—3) выбрана правильно, то по такому спектру можно детально судить о его свойствах, даже если сигнал не стационарен.

Для хорошей обусловленности и вычислительной эффективности процедур (4)—(5) следует использовать жесткий фрейм с границей $A = 1$. В этом случае согласно (5) матрица $\mathbf{G}\mathbf{G}^*$ должна быть единичной, т.е. прямоугольная матрица \mathbf{G} должна состоять из ортонормированных строк. Однако, приведенные выше построения (2)—(3) это не гарантируют. Поэтому все дальнейшие действия будут сводиться к нахождению оптимального жесткого DWH-фрейма \mathbf{U}_{opt} с единичными границами, который наилучшим образом приближает желаемый эталон \mathbf{G} . При этом будем предполагать, что матрица $\mathbf{B} = \mathbf{G}\mathbf{G}^*$ положительно определена, что на практике всегда выполняется.

Обозначим $\mathfrak{A}_{m,n} = \{\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{m \times n} : \mathbf{U}\mathbf{U}^* = \mathbf{I}_m, m < n\}$ множество прямоугольных матриц с ортонормированными строками. Тогда синтез матрицы оптимального DWH-фрейма $\mathbf{U}_{opt} \in \mathfrak{A}_{N,N_-}$ по заданному эталону \mathbf{G} можно представить как решение следующей экстремальной задачи

$$\mathbf{U}_{opt} : \min_{\mathbf{U} \in \mathfrak{A}_{N,N_-}} \|\mathbf{G} - \mathbf{U}\|^2. \quad (6)$$

Определим блочно-диагональную унитарную $(N \times N)$ -матрицу

$$\mathbf{F} = \mathbf{I}_M \otimes \mathbf{F}_o, \quad \mathbf{F}_o = L^{-1/2} (\exp(j2\pi pq / L))_{p,q \in J_L}, \quad (7)$$

в которой по диагонали стоят унитарные матрицы Фурье \mathbf{F}_o размерности, $(L \times L)$ и сформируем ортогональную матрицу перестановки $\mathbf{P} \in \mathfrak{A}_N$

$$\mathbf{P} = (P(i, j))_{i, j \in J_N}, \quad P(i, j) = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ если } j = Mi_{[L]} + \lfloor i/L \rfloor; \\ 0, \text{ иначе} \end{array} \right\}, \quad (8)$$

где $a_{[n]} = a \pmod n$, $\lfloor \cdot \rfloor$ — оператор взятия целой части числа.

Обозначим через $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \in \mathcal{M}_N$ матрицу, у которой на диагонали стоят собственные числа матрицы $\mathbf{B} = \mathbf{G}\mathbf{G}^*$. Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Все собственные числа $\lambda_i > 0$ матрицы $\mathbf{B} = \mathbf{G}\mathbf{G}^*$ положительны, имеют кратность не меньше P и могут быть получены из значений $g_c[n]$, $n \in J_N$, формирующего импульса (1) по следующей формуле

$$\begin{aligned} \lambda &= \sqrt{L} \mathbf{F}^* \tilde{\mathbf{b}}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = (\tilde{\mathbf{b}}_0^T, \dots, \tilde{\mathbf{b}}_M^T)^T \in \mathbb{C}^N, \\ \tilde{\mathbf{b}}_i &= (\tilde{b}_i[0], \dots, \tilde{b}_i[L-1])^T \in \mathbb{C}^L, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\tilde{b}_i[i] = \begin{cases} PM \sum_{l=0}^{L-1} g_c[lM + p'] g_c[(i+l)_{[L]}M + p'], & i \in J_L \text{ \& } i_{[P]} = 0 \\ 0, & i \in J_L \text{ \& } i_{[P]} \neq 0 \end{cases}$$

Теорема 2. Матрица оптимального DWH-фрейма может быть вычислена в явном виде по формулам

$$\mathbf{U}_{opt} = \mathbf{H}\mathbf{G}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{P}^T \mathbf{F} \mathbf{\Lambda}^{-1/2} \mathbf{F}^* \mathbf{P}, \quad (10)$$

где \mathbf{H} определяет оператор оптимальной «подгонки» к желаемой эталонной системе функций \mathbf{G} по среднеквадратическому критерию (5).

Из (7)—(10) следует, что матрица \mathbf{H} факторизуется в произведение разреженных матриц $\mathbf{\Sigma}$, \mathbf{F} , \mathbf{P} , а значит алгоритм нахождения оптимального DWH-фрейма (8) является вычислительно эффективным. Отметим также, что для дуального фрейма (10) структура этих матриц \mathbf{F} , \mathbf{P} оказывается более разреженной и чем у аналогичных матриц, полученных в работе [12] для обычного фрейма. Более того, эти матрицы не зависят от коэффициента пересыщения P , а определяются только параметрами L, M базовых сдвигов по времени и частоте.

3. Результаты эксперимента

На рисунках 1—2 представлены трехмерные изображения функций неопределенности (ФН) формирующего импульса оптимального DWH-

фрейма (10), вычисленные для разных значений коэффициента пересыщения $P = 4$, $P = 8$ и одинаковых базовых параметрах $L = 8$, $M = 64$, $N = 512$. Исходным непрерывным формирующим импульсом $g(t)$, $t \in \mathbb{R}$ был выбран гауссиан. Видно, что в обоих случаях достигается хорошая частотно-временная локализация без боковых лепестков. Это обеспечивается во многом благодаря критерию оптимальности (6), согласно которому синтезируемый оптимальный DWH-фрейм \mathbf{U}_{opt} наилучшим образом аппроксимирует эталонную систему функций \mathbf{G} из сдвинутых по времени и частоте дискретных гауссианов (1). В частности, при выбранных параметрах WН-фрейма относительная ошибка отклонения от эталона $\varepsilon_o = 100\% \cdot \|\mathbf{G} - \mathbf{U}_{opt}\| / \|\mathbf{G}\|$ не превышает 1%. Причем с уменьшением коэффициента $P \in (2, \dots, L)$ шибка ε_o резко возрастает и при $P = 2$ уже составляет 7%. Соответственно, на вертикальных сечениях ФН появляются боковые лепестки, ухудшающие частотно-временную локализацию.

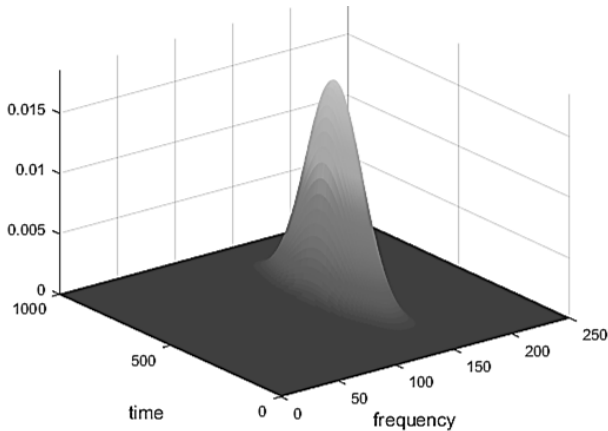


Рис. 1. Функция неопределенности формирующего импульса DWH-фрейма с параметрами $P=8$, $L=8$, $M=64$.

Fig. 1. Ambiguity function of the forming pulse of a DWH frame with parameters $P=8$, $L=8$, $M=64$

Отметим, что для дуального фрейма рост коэффициента пересыщения P равносильен увеличению количеству сдвигов по частоте $M_o = MP > M$ внутри заданного диапазона частот $\Delta_f = [0, W]$, а значит уменьшению расстояния по частоте между соседними импульсами фрейма. Это приводит к сужению ширины спектра каждого импульса, а значит увеличению его эффективной длительности, что мы и наблюдаем, сравнивая ФН на рис. 1—2.

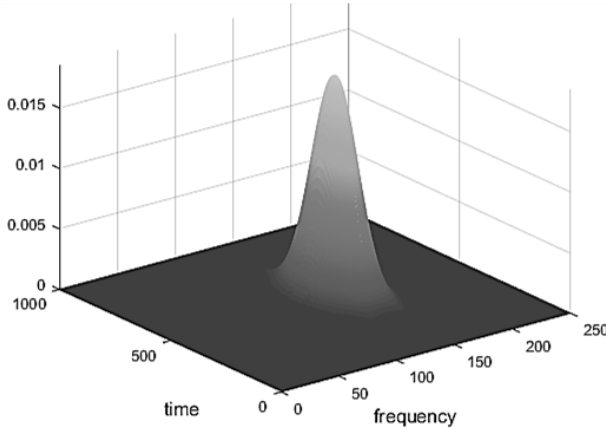


Рис. 2. Функция неопределенности формирующего импульса DWH-фрейма с параметрами $P=4, L=8, M=64$.

Fig. 2. Ambiguity function of the forming pulse of a DWH frame with parameters $P=4, L=8, M=64$

Применение оптимального DWH-фрейма для задач спектрально-временного анализа нестационарных сигналов позволяет эффективно разлагать его на хорошо локализованные частотно-временные фрагменты, чтобы потом внутри каждого из них детально изучить его поведение и особенности. Ниже приводится пример, демонстрирующий то, как описанные выше DWH-фреймы с ФН на рис.1—2 могут быть использованы для решения задачи обнаружения-различения двух гармонических сигналов $s_1(t), s_2(t)$ на фоне белого гауссовского шума (АБГШ) $n(t)$ и мощной гармонической помехи $s_3(t)$.

$$\begin{aligned}
 s_1(t) &= 3 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1); & s_2(t) &= 4 \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2); \\
 s_3(t) &= 20 \cos(2\pi f_3 t + \varphi_3); & n(t) &\sim \mathcal{N}(0; N_o) - \text{АБГШ}; \\
 s(t) &= s_1(t) + s_2(t) + s_3(t) + n(t), \\
 N_o &= 6.4; & f_1 &= 74.7 \text{ кГц}; & f_2 &= 76.5 \text{ кГц}; & f_3 &= 79.4 \text{ кГц}
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

В формулах (11) частоты f_1, f_2, f_3 сигналов и помехи близки друг другу, $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \pi / 4$, а шум $n(t)$ имеет нулевое математическое ожидание и интенсивность N_o .

В процессе эксперимента сравнивались два метода спектрального анализа: один основан на классическом дискретном преобразовании Фурье (DFT), второй использует DWH-фреймы с коэффициентами пересыщения $P = 4$ и $P = 8$. Перед обработкой непрерывный сигнал $s(t)$ дис-

крегитизировался с частотой $f_d = 300$ кГц, а из полученных отсчетов $s_n = s(n/f_d)$, $n \in J_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$ формировался сигнальный вектор $\mathbf{s} = [s_0, \dots, s_{N-1}]^T$. Для вычисления фреймового спектра и фреймового разложения сигнала \mathbf{s} использовались формулы

$$\mathbf{x} = \mathbf{U}_{opt}^* \mathbf{s}, \quad \mathbf{s} = \mathbf{U}_{opt} \mathbf{x}.$$

Результаты обработки сигнала (1) DFT/DWH-методами приведены на рис. 3—4. Анализ представленных спектров показывает, что DFT-метод не позволяет обнаружить и тем более различить сигналы $s_1(t), s_2(t)$ на фоне мощной маскирующей помехи $s_3(t)$, потому что их DFT-спектры сильно перекрываются по боковым лепесткам. Указанный эффект, с одной стороны, объясняется плохой частотной локализацией бинов DFT-спектра, а с другой — некратностью частот f_1, f_2, f_3 расстоянию $\delta_f = f_d / M_o$ между соседними бинами.

Совсем другой результат дает DWH-метод — спектральные составляющие гармонических сигналов и помехи достаточно уверенно обнаруживаются и различаются, позволяя приблизительно оценить их частоты и амплитуды. Причем, как следует из графиков на рис.3—4, DWH-фрейм с коэффициентом пересыщения $P = 8$ (рис. 4) обеспечивает более хорошее разрешение сигналов, чем DWH-фрейм с $P = 4$ (рис. 3).

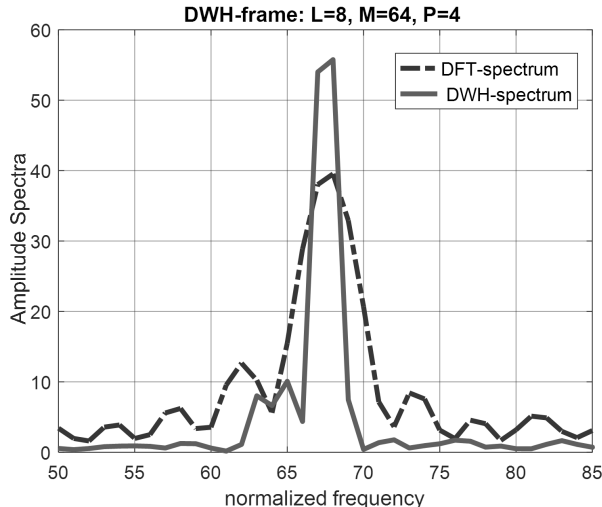


Рис. 3. Спектральный анализ сигнала (11) методами DFT и DWH при $P=4$.

Fig. 3. Spectral signal analysis (11) by DFT and DWH methods for $P=4$

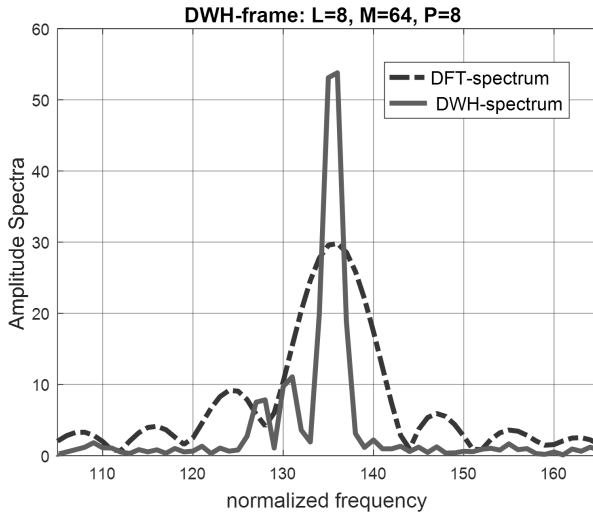


Рис. 4. Спектральный анализ сигнала (11) методами DFT и DWH при $P=8$.

Fig. 4. Spectral signal analysis (11) by DFT and DWH methods for $P=8$

4. Заключение

1) Решена задача синтеза оптимальных комплексных DWH-фреймов, обладающих желаемыми свойствами. При этом выбранный критерий оптимальности (6) минимизирует величину его отклонения от желаемого эталона по среднеквадратическому критерию, что значительно упрощает структуру последующих решений.

2) Предложенный матричный алгоритм нахождения оптимального DWH-фрейма является вычислительно эффективным, поскольку соответствующий оператор оптимальной «подгонки» (10) представляется в виде произведения сильно разреженных матриц.

3) Импульсы оптимального DWH-фрейма очень близки по форме к желаемым импульсам эталона и хорошо локализованы по времени и по частоте, позволяя обеспечить требуемые характеристики частотно-временного разрешения.

4) Спектральный анализ на основе оптимальных DWH-фреймов позволяет при коэффициенте пересыщения $P \geq 4$ эффективно селективировать и различать узкополосные сигналы на фоне мощных соседних помех и шумов, что может иметь большое практическое применение.

Список литературы

1. Gabor D. Theory of communication // J. Inst. Elect. Eng. (London). 1946. Vol. 93, no 111. Pp. 429—457.
2. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 464 с.
3. Wexler J., Raz S. Discrete Gabor expansions // Signal Processing. 1990. Vol. 21. Pp. 207—220.
4. Zibulski M., Zeevi Y. Y. Frame analysis of the discrete Gabor-scheme // IEEE Trans. Signal Processing. 1994. Vol. 42. Pp. 942—945.
5. Qian S., Chen K., Li S. Optimal biorthogonal functions for finite discrete-time Gabor expansion // Signal Processing. 1992. Vol. 27. Pp. 177—185.
6. Augustus J. E., Janssen M., Bolcskei H. Equivalence of Two Methods for Constructing Tight Gabor Frames // IEEE Signal Processing Letters. 2000. Vol. 7, no 4. Pp. 79—82.
7. Bolcskei H., Feichtinger H. G., Hlawatsch F. Diagonalizing the Gabor frame operator // Proc. IEEE UK Symp. Applications Time-Frequency Time-Scale Methods. Univ. Warwick, Coventry, U. K., Aug. 1995. Pp. 249—255.
8. Волчков В. П. Сигнальные базисы с хорошей частотно-временной локализацией // Электросвязь. 2007. № 2. С. 21—25.
9. Volchkov V. P., Petrov D. A. Orthogonal Well-Localized Weyl–Heisenberg Basis Construction and Optimization for Multicarrier Digital Communication Systems // Proc. of ICUMT, St. Petersburg, Oct. 2009.
10. Волчков В. П., Санников В. Г. Синтез ортогональных вещественных сигнальных базисов Вейля — Гейзенберга на основе алгебраического подхода // Электросвязь. 2019. № 5. С. 28—34.
11. Волчков В. П. Синтез комплексных сигнальных фреймов Вейля — Гейзенберга с хорошей частотно-временной локализацией // Инфокоммуникационные и радиоэлектронные технологии. 2019. Т. 2, № 1. С. 86—99.
12. Volchkov V., Sannikov V., Mamonov A. Synthesis of Real Weyl–Heisenberg Signal Frames with Desired Frequency-Time Localization. 2019 24th Conference of Open Innovations Association (FRUCT). Moscow, Russia. 2019. Pp. 502—508.
13. Опенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. М. : Техносфера, 2012. 1048 с.

Информация об авторах

Волчков Валерий Павлович, доктор технических наук, профессор кафедры общей теории связи Московского технического университета связи и информатики «МТУСИ», г. Москва, Российская Федерация.

Санников Владимир Григорьевич, кандидат технических наук, доцент кафедры общей теории связи Московского технического университета связи и информатики «МТУСИ», г. Москва, Российская Федерация.

Information about the authors

Valery P. Volchkov, Doctor of technical sciences (Eng.), Professor of the Department of Fundamentals of the General Theory of Communication of the Moscow Technical University of Communications and Informatics "MTUCI", Moscow, Russian Federation.

Vladimir G. Sannikov, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of General Theory of Communications, Moscow Technical University of Communications and Informatics MTUCI, Moscow, Russian Federation.