

УДК 621.391

Метод синтеза согласованного фильтра для условий белого шума и негауссовских помех

Дегтярёв А. Н., Кожемякин А. С.

Севастопольский государственный университет
ул. Университетская, 33, Севастополь, 299053., Российская Федерация
Degtyaryov1966@yandex.ru

Получено: 16 мая 2022 г.

Отрецензировано: 5 июня 2022 г.

Принято к публикации: 5 июня 2022 г.

Аннотация: *Предлагается метод синтеза согласованного фильтра для условий одновременного действия белого шума и негауссовских помех. Метод основан на представлении согласованного фильтра в виде линейной системы, реализующей интегральное преобразование с вещественным ядром. Шум, негауссовская помеха и сигнал считаются ограниченными по частоте. Определяется отношение сигнал-шум в отсчетный момент времени. Разложение корреляционной функции помехи и сигнала в ряд по функциям отсчетов и полученное отношение сигнал-шум дают уравнение, позволяющее определить сигналы, максимизирующие отношение сигнал-шум.*

Ключевые слова: *отношение сигнал-шум, согласованный фильтр, корреляционная функция, белый гауссовский шум, негауссовская помеха, интегральное преобразование.*

Для цитирования (ГОСТ 7.0.5—2008): Дегтярёв А. Н., Кожемякин А. С. Метод синтеза согласованного фильтра для условий белого шума и негауссовских помех // *Инфокоммуникационные и радиоэлектронные технологии*. 2022. Т. 5, № 2. С. 253—259.

Для цитирования (ГОСТ 7.0.100—2018): Дегтярёв, А. Н. Метод синтеза согласованного фильтра для условий белого шума и негауссовских помех / А. Н. Дегтярёв, А. С. Кожемякин // *Инфокоммуникационные и радиоэлектронные технологии*. — 2022. — Т. 5, № 2. — С. 253—259.

1. Введение

Известно, что повышение отношения сигнал-шум на входе решающего устройства радиотехнической системы, построенной по какому-либо критерию, могут обеспечить согласованный фильтр или коррелятор [1].

При этом характеристики указанных устройств связаны с формой сигнала, с которым они согласованы. В случае, когда на входе приемника действует аддитивная смесь сигнала и белого гауссовского шума отношение сигнал-шум зависит только от энергии сигнала и спектральной плотности мощности шума, и не зависит от формы сигнала. Если шум на входе приемника является суммой белого гауссовского шума и некоторой негауссовской помехи, то для повышения отношения сигнал-шум используют каскадно включенные обесцвечивающий фильтр и фильтр, согласованный с полезным сигналом, снимаемым с выхода обесцвечивающего фильтра [1]. Помехоустойчивость системы возрастает за счет того, что спектральные составляющие сигнала, не пораженные помехой, усиливаются [1]. В данном случае для повышения отношения сигнал-шум учитывается форма сигнала.

Однако при чрезмерном усилении таких спектральных составляющих возможны нелинейные искажения сигнала, приводящие к снижению помехоустойчивости приемника. Кроме того, использование пары фильтров вместо одного согласованного фильтра усложняет приемник.

Целесообразно разработать метод синтеза пары: сигнал — согласованный с ним фильтр, который позволяет исключить использование обесцвечивающего фильтра.

2. Теория

Пусть на вход согласованного фильтра поступает аддитивная смесь полезного сигнала $s(t)$, ограниченного по частоте верхней частотой f_m , и реализации помехи $n(t)$, которая имеет корреляционную функцию $B_n(t, \tau)$

$$z(t) = s(t) + n(t)$$

Будем рассматривать согласованный фильтр в виде линейного устройства, реализующего интегральное преобразование

$$x(\tilde{t}) = \int_0^{t_0} R(t, \tilde{t}) z(t) dt,$$

где $R(t, \tilde{t})$ — ядро интегрального преобразования, t_0 — время наблюдения сигнала.

Выходной сигнал $x(\tilde{t})$ имеет вид

$$x(\tilde{t}) = \int_0^{t_0} R(t, \tilde{t}) z(t) d\tau = \int_0^{t_0} R(t, \tilde{t}) [s(t) + n(t)] dt.$$

Математическое ожидание процесса $x(\tilde{t})$ с учетом нулевого математического ожидания помехи $n(t)$ равно:

$$m_x(\tilde{t}) = M \left\{ \int_0^{t_0} R(t, \tilde{t}) [s(t) + u(t)] dt \right\} = \int_0^{t_0} R(t, \tilde{t}) s(t) dt. \quad (1)$$

Поскольку решение о приеме сигнала $s(t)$ принимается в момент времени t_0 , то при $\tilde{t} = t_0$, имеем

$$m_x(t_0) = \int_0^{t_0} R(t, t_0) s(t) dt. \quad (2)$$

Используя неравенство Буняковского — Шварца, из (2) получаем

$$m_x(t_0) \leq \int_0^{t_0} R(t, t_0) s(t) dt = \sqrt{\int_0^{t_0} R^2(t, t_0) dt \int_0^{t_0} s^2(t) dt}.$$

Равенство в этой формуле возможно, если

$$R(t, t_0) = cs(t), \quad (3)$$

где c — положительная константна.

Дисперсия процесса $x(\tilde{t})$ имеет вид

$$D_x(\tilde{t}) = M \{x^2(\tilde{t}) - m_x^2(\tilde{t})\}.$$

Вычислим $M \{x^2(\tilde{t})\}$:

$$\begin{aligned} M \{x^2(\tilde{t})\} &= M \left\{ \int_0^{t_0} R(t, \tilde{t}) [s(t) + n(t)] dt \int_0^{t_0} R(\tau, \tilde{t}) [s(\tau) + n(\tau)] d\tau \right\} = \\ &= M \left\{ \int_0^{t_0} \int_0^{t_0} R(t, \tilde{t}) R(\tau, \tilde{t}) [s(t)s(\tau) + s(t)n(\tau) + n(t)s(\tau) + n(t)n(\tau)] dt d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Используем линейность операций интегрирования и взятия математического ожидания, а также тот факт, что $M \{n(t)\} = 0$, и получим

$$\begin{aligned} M \{x^2(\tilde{t})\} &= \int_0^{t_0} \int_0^{t_0} R(t, \tilde{t}) R(\tau, \tilde{t}) [s(t)s(\tau) + B_n(t, \tau)] dt d\tau = \\ &= \int_0^{t_0} \int_0^{t_0} R(t, \tilde{t}) R(\tau, \tilde{t}) s(t)s(\tau) dt d\tau + \int_0^{t_0} \int_0^{t_0} R(t, \tilde{t}) R(\tau, \tilde{t}) B_n(t, \tau) dt d\tau. \end{aligned} \quad (5)$$

Преобразуем первое слагаемое равенства (5) и получаем

$$M \{x^2(\tilde{t})\} = \left[\int_0^{t_0} R(t, \tilde{t}) s(t) dt \right]^2 + \int_0^{t_0} \int_0^{t_0} R(t, \tilde{t}) R(\tau, \tilde{t}) B_n(t, \tau) dt d\tau.$$

Таким образом, с учетом (1) и (5), дисперсия процесса $x(\tilde{t})$ равна

$$D_x(\tilde{t}) = \int_0^{t_0} \int_0^{t_0} R(t, \tilde{t}) R(\tau, \tilde{t}) B_n(t, \tau) dt d\tau$$

и в момент принятия решения составляет

$$D_x(t_0) = \int_0^{t_0} \int_0^{t_0} R(t, t_0) R(\tau, t_0) B_n(t, \tau) dt d\tau.$$

Учтем выражение (3) и получим

$$D_x(t_0) = \int_0^{t_0} \int_0^{t_0} c^2 s(t) s(\tau) B_n(t, \tau) dt d\tau.$$

Отношение сигнал-шум на выходе согласованного фильтра в момент принятия решения ($\tilde{t} = t_0$) записывается как

$$h(t_0) = \frac{\int_0^{t_0} s^2(t) dt}{\sqrt{\int_0^{t_0} \int_0^{t_0} s(t) s(\tau) B_n(t, \tau) dt d\tau}} = \frac{E_s}{\sqrt{\int_0^{t_0} \int_0^{t_0} s(t) s(\tau) B_n(t, \tau) dt d\tau}}, \quad (6)$$

где E_s — энергия $s(t)$.

Выражение (6) описывает отношение сигнал-шум на выходе согласованного с сигналом $s(t)$ фильтра при поступлении на его вход аддитивной смеси сигнала $s(t)$ и реализации помехи $n(t)$ с корреляционной функцией $B_n(t, \tau)$.

Отметим, что если $n(t)$ — реализация дельта-коррелированного белого шума со спектральной плотностью мощности $N_0/2$, то

$$B_n(t, \tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau - t).$$

Тогда

$$h(t_0) = \frac{E_s}{\sqrt{\int_0^{t_0} \int_0^{t_0} s(t) s(\tau) \frac{N_0}{2} \delta(\tau - t) d\tau dt}}.$$

Откуда, с учетом фильтрующего свойства δ -функции, имеем

$$h(t_0) = \frac{E_s}{\sqrt{\frac{N_0}{2} \int_0^{t_0} s^2(\tau) d\tau}} = \sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}.$$

что не противоречит известному факту.

Поскольку сигнал $s(t)$ ограничен по частоте, то на основании теоремы В. А. Котельникова его можно разложить в ряд по функциям отсчетов

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \varphi_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s\left(\frac{n}{2f_m}\right) \frac{\sin 2\pi f_m \left(t - \frac{n}{2f_m}\right)}{2\pi f_m \left(t - \frac{n}{2f_m}\right)}. \quad (7)$$

Поскольку помеха рассматривается в частотной полосе существования сигнала, то корреляционная функция помехи также раскладывается в ряд по функциям отсчетов

$$B_n(t, \tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} k_{km} \varphi_k(t) \varphi_m(\tau), \quad (8)$$

где

$$k_{km} = \int_{-t_0}^{t_0} \int_{-t_0}^{t_0} B_n(t, \tau) \varphi_k(t) \varphi_m(\tau) dt d\tau.$$

Подставим выражения (7) и (8) в формулу (6) и получим

$$h(t_0) = \frac{\int_0^{t_0} s^2(t) dt}{\sqrt{\int_0^{t_0} \int_0^{t_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \varphi_k(t) \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \varphi_l(\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} k_{nm} \varphi_n(t) \varphi_m(\tau) dt d\tau}} = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^2}{\sqrt{\int_0^{t_0} \int_0^{t_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} k_{km} a_n a_m}} \quad (9)$$

Учтем ортогональность функций отсчетов и после преобразования выражения (21) получим

$$h(t_0) = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^2}{\sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} k_{nm} a_n a_m}}. \quad (10)$$

Выражение (10) позволяет синтезировать сигналы, которые максимизируют отношение сигнал-шум при заданной корреляционной функции помехи.

Задача синтеза сигналов сводится к определению коэффициентов a_n , которые обращают в максимум отношение сигнал-шум (10).

Система уравнений для вычисления требуемых коэффициентов a_n может быть получена из условий

$$\frac{dh(t_0)}{da_i} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{d^2 h(t_0)}{da_i^2} < 0. \quad (12)$$

Приравнивание к нулю первой производной (11) дает систему уравнений относительно a_i вида

$$4a_i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} k_{nm} a_n a_m - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^2 \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} k_{im} a_m + \sum_{k=-\infty}^{\infty} k_{ki} a_k \right) = 0. \quad (13)$$

Если полученные значения a_i обращают в истинное выражение неравенство (24), то эти значения и есть решение задачи.

Очевидно, что при решении уравнений (13) необходимо задавать конечные пределы суммирования, которые ограничиваются допустимой погрешностью аппроксимации корреляционной функции помехи.

3. Заключение

В случае, когда на входе приемника действует аддитивная смесь сигнала, белого шума и негауссовской помехи, обесцвечивающий фильтр можно не использовать. Однако, при синтезе согласованного фильтра необходимо учитывать форму сигнала. Поскольку импульсная характеристика согласованного фильтра определяется сигналом, то для максимизации отношения сигнал-шум необходимо синтезировать сигнал. Синтез сигнала возможен, если известна корреляционная функция негауссовской помехи. Поскольку сигнал и негауссовская помеха ограничены по частоте, то сигнал и корреляционная функция помехи раскладываются в ряд по функциям отсчетов на основании теоремы В. А. Котельникова. Подстановка в полученную формулу для отношения сигнал-шум указанных рядов дает выражение, зависящее от неизвестных отсчетов сигнала и известных отсчетов корреляционной функции негауссовской помехи. Задача синтеза сигнала, а, соответственно, и согласованного с ним фильтра, состоит в определении отсчетов сигнала, максимизирующих полученное отношение сигнал-шум.

Такой подход к повышению помехоустойчивости радиотехнической системы позволяет не подключать обесцвечивающий фильтр ко входу согласованного фильтра.

Список литературы

1. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. Москва : Дрофа, 2006. 719 с.

Информация об авторах

Дегтярёв Александр Николаевич, доцент Севастопольского государственного университета, г. Севастополь, Российская Федерация.

Кожемякин Александр Сергеевич, младший научный сотрудник Севастопольского государственного университета, г. Севастополь, Российская Федерация.

Matched Filter Design Method for White Noise and Non-Gaussian Noise Conditions

A. N. Degtyaryov and A. S. Kozhemyakin

*Sevastopol State University
33, Universitetskaya st., Sevastopol, 299053, Russian Federation
Degtyaryov1966@yandex.ru*

Received: May 16, 2022

Peer-reviewed: June 5, 2022

Accepted: June 5, 2022

Abstract: *A method for synthesizing a matched filter for conditions of simultaneous action of white noise and non-Gaussian noise is proposed. The method is based on the representation of the matched filter as a linear system that implements an integral transformation with a real kernel. Noise, non-Gaussian noise and signal are considered to be frequency limited. The signal-to-noise ratio at the reference point in time is determined. The expansion of the correlation function of the interference and the signal into a series of count functions and the resulting signal-to-noise ratio give an equation that allows one to determine the signals that maximize the signal-to-noise ratio.*

Keywords: *signal-to-noise ratio, matched filter, correlation function, white Gaussian noise, non-Gaussian interference, integral transform.*

For citation (IEEE): A. N. Degtyaryov and A. S. Kozhemyakin, “Matched Filter Design Method for White Noise and Non-Gaussian Noise Conditions,” *Infocommunications and Radio Technologies*, vol. 5, no. 2, pp. 253–259, 2022, doi: 10.29039/2587-9936.2022.05.2.19. (In Russ.).

References

- [1] I. S. Gonorovsky, *Radio engineering circuits and signals*, Moscow: Drofa, 2006. (In Russ.).

Information about the authors

Alexander N. Degtyaryov, Associate Professor, Sevastopol State University, Sevastopol, Russian Federation.

Alexander S. Kozhemyakin, junior researcher, Sevastopol State University, Sevastopol, Russian Federation.