

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С КИНЕТИКОЙ ТИПА МОНО

Дусаева Я.М.¹, Водопьянов В.В.²

Уфимский государственный авиационный технический университет
ул. К. Маркса, 12, Уфа, 450008, РФ; e-mail: ¹yanadusaeva@mail.ru, ²vodop@yandex.ru

Поступила в редакцию: 01.06.2018

Аннотация. Работа посвящена исследованию уравнения типа Фишера-КПП с особой правой частью в виде функции Моно. Данный тип уравнения часто используется при моделировании биологических систем, например, в системе уравнений, описывающей рост опухолевых клеток. Несмотря на большое количество работ, посвященных исследованию уравнения данного типа с различными источниками, подобный тип источника редко встречается в исследованиях. Функция Моно возникает в случае, когда речь идет о биологических популяциях, которые могут вступать в реакцию только при адсорбции, а также в ряде многих других случаях. Целью данной работы является исследование данного типа уравнений. Для поставленной задачи была доказана теорема сравнения и теорема о постоянстве формы волны во времени, а также найдено поведение решения уравнения в окрестности нуля и в бесконечности. Результаты аналитического исследования были подтверждены при численном моделировании.

Ключевые слова: уравнение КПП, кинетика Моно, нелинейное параболическое уравнение, теорема сравнения, модели биологических систем, численное моделирование, решение типа бегущей волны.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрение точечных математических моделей биологических систем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(u),$$

где $u(t)$ – плотность популяции, показывает, что в качестве источников роста (активатора) или стока (ингибитора) $f(u)$ выступают, как правило, аддитивные и мультипликативные комбинации функций всего трех видов:

- 1) u^n – при $n=1$ функция Мальтуса, при $n=2$ функция судного дня;
- 2) $u(K-u)$ – логистическая функция (функция Ферхюльста);
- 3) $\frac{Mu}{K+u}$ – функция Моно (функция Михаэлиса-Ментен).

Выбор той или иной комбинации функций типа 1-3 определяются кинетикой исследуемого процесса.

В работах Фишера, Колмогорова, Петровского, Пискунова впервые началось исследование нелинейных параболических уравнений вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u). \quad (1)$$

С этого момента исследованием данного уравнения занимались многие авторы (достаточно подробно полученные результаты можно найти в [1] и [2]). Однако в качестве функции $F(u)$ использовали в основном комбинации функций 1 и 2 видов. Источник типа Моно редко встречается в исследованиях нелинейных параболических уравнения. Вместе с тем рассмотрение уравнений с функциями вида $\frac{Mu}{K+u}$ представляет несомненно большой интерес. Эта функция возникает в случае, когда речь идет о биологических популяциях, которые могут вступать в реакцию только при адсорбции, а также в ряде многих других случаях (см. примеры подобных математических моделей в [3], [4], [5]).

Цель наших исследований – изучение уравнения типа (1), где в качестве источника выступает функция типа Моно.

Госановка задачи. Рассмотрим полулинейное параболическое уравнение с источником в виде функции Моно:

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \frac{w(x,t)}{1+w(x,t)}, \quad (2)$$

$$w(x,t) \in C^2([0,T] \times [0,+\infty)) \cap C([0,T] \times [0,+\infty)).$$

Введем обозначения:

$$B(w) = k \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \frac{w(x,t)}{1+w(x,t)},$$

$$F(w) = \frac{w(x,t)}{1+w(x,t)}.$$

Здесь $w(x,t)$ – плотность вещества в данной точке, D – коэффициент диффузии, а свободный член удовлетворяет следующим условиям:

$$F(0) = 0, F(1) = \frac{1}{2}, F(w) < 1 \text{ при } w \geq 0,$$

$$F'(0) = 1, F'(1) = \frac{1}{4}, F'(w) \leq 1 \text{ при } w \geq 0.$$

Функция $F(w)$ имеет следующий смысл: в каждой точке пространства, кроме диффузии, имеется также источник, скорость которого монотонно растет к максимальному значению с ростом плотности вещества. В биологических системах подобные случаи встречаются при неограниченном (или очень большом) присутствии продуктов питания.

Возьмем коэффициент диффузии $D = 1$. Зададим начальные:

$$w(x,0) = w_0(x) \geq 0, x \in [0,+\infty) \tag{3}$$

и граничные условия:

$$\left. \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, t \in [0,T] \tag{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} w(x,t) = 0, t \in [0,T]. \tag{5}$$

Если функция $w_0(x)$ имеет компактный носитель, т.е. носитель на отрезке $[0, X_0]$, то вне этого отрезка не будет происходить роста $w(x,t)$ пока за счет диффузионных процессов в этой точке функция $w(x,t)$ станет ненулевой. Но так как процессы рассматриваются в конечный промежуток и скорость диффузии конечна, то задачу можно рассмотреть не на промежутке $[0,+\infty)$, а на отрезке $[0, X]$ при достаточно больших значениях X . Таким образом, уравнение (2) можно рассматривать для функции

$$w(x,t) \in C^{1,2}([0,T] \times [0, X]) \cap C([0,T] \times [0, X])$$

и заменить граничное условие (5) на условие

$$w(X,t) = 0. \tag{6}$$

Теорема 1 (существования решения). Пусть дано уравнение

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + F(x,t,w), \tag{7}$$

где непрерывная и ограниченная функция $F(x,t,w)$ удовлетворяет условию Липшица по w и x , т. е.

$$|F(x_2,t,w_2) - F(x_1,t,w_1)| < k |w_2 - w_1| + k |x_2 - x_1|$$

(k – постоянная, не зависящая от x, t, w). Пусть $w_0(x, t)$ – некоторая ограниченная функция, определенная для всех значений x . Для простоты будем предполагать, что $w_0(x, t)$ имеет только конечное число точек разрыва. Тогда существует одна и только одна ограниченная при ограниченных значениях t функция $w(x, t)$, которая при $t > 0$ удовлетворяет уравнению (7) и при $t = 0$ принимает значение $w_0(x, t)$ во всех точках непрерывности этой функции, а также условию (4). В дальнейшем, для краткости говоря, что $w(x, t)$ обращается в $w_0(x, t)$ при $t = 0$, мы будем всегда иметь в виду только точки непрерывности функции $w_0(x, t)$.

Утверждение теоремы может быть получено из соответствующей теоремы в [6], если рассматривать уравнение (7) на всей числовой оси, продолжив симметрично на отрицательную ось начальное условие (3). В этом случае, в силу симметрии начальных условий и уравнения, решение, существование которого установлена в [6], будет заведомо удовлетворять условию (4).

Теорема (принцип максимума). Пусть функция определена и непрерывна в замкнутой области $0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq X$, удовлетворяет уравнению (2). Пусть она достигает своего максимума в точке P_0 , являющейся серединой отрезка $t = T$. Тогда $u(x, t) \equiv u(P_0)$ всюду в области $0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq X$.

Доказательство теоремы можно найти в статье [7].

Теорема (сравнения). Пусть в $[0, T] \times \bar{\Omega}$ определено решение задачи (2)-(4), (6) $w(x, t)$, а также функции $w_-(x, t), w_+(x, t) \in C^{1,2}([0, T] \times [0, X])$, удовлетворяющие неравенствам:

$$\frac{\partial w_+(x, t)}{\partial t} \geq B(w_+(x, t)), \quad (9)$$

$$\frac{\partial w_-(x, t)}{\partial t} \leq B(w_-(x, t)) \text{ в } [0, T] \times [0, X], \quad (10)$$

и кроме того

$$w_-(x, 0) < w_0(x) < w_+(x, 0), x \in [0, X], \quad (11)$$

$$\left. \frac{\partial w_-(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} < \left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} < \left. \frac{\partial w_+(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad (12)$$

$$w_-(X, t) < w(X, t) < w_+(X, t). \quad (13)$$

Тогда верно:

$$w_-(x, t) < w(x, t) < w_+(x, t) \text{ в } [0, T] \times [0, X]. \quad (14)$$

Доказательство:

Рассмотрим неравенства:

$$\frac{\partial w_-(x, t)}{\partial t} \leq B(w_-(x, t)) \text{ в } [0, T] \times [0, X],$$

$$w_-(x, 0) < w_0(x), x \in [0, X],$$

$$\left. \frac{\partial w_-(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} < \left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0,$$

$$w_-(X, t) < w(X, t) = 0.$$

Если все неравенства являются строгими в некоторых подобластях, то в силу непрерывности решения, строгое неравенство будет выполняться, по крайней мере, в окрестности нулевой точки времени.

Пусть M – множество точек σ в интервале $(0, T]$ таких, что:

$$w_-(x, t) < w(x, t) \text{ в } [0, \sigma) \times [0, X].$$

Обозначим $t_0 = \sup(\sigma)$. Нужно доказать, что $t_0 = T$. Пусть $t_0 < T$. Обозначим $z(x, t) = w(x, t) - w_-(x, t)$. Тогда:

$$z(x,t) > 0 \text{ в } \Omega_{t_0} = [0, X] \cap (0 < t < t_0),$$

$$z(x,t) \geq 0 \text{ в } D_{t_0} = (0, X) \times \{t = t_0\}.$$

Так как $z(x,t) = w(x,t) - w_-(x,t)$, $w_-(X,t) < w(X,t)$, то $z(x,t) \neq 0$ на границе $[0, X] \times \{t = t_0\}$. Следовательно, \exists точка $P^0 = (x^0, t^0) : z(P^0) = 0$ в области D_{t_0} .

В точке $P^0 : w(x^0, t^0) = w_-(x^0, t^0)$. Так как в точке P^0 функция $z(x^0, t^0)$ достигает минимума, то

$$\left. \frac{\partial z(x,t)}{\partial x} \right|_{(x^0, t^0)} = 0, \text{ а } \left. \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2} \right|_{(x^0, t^0)} > 0.$$

Но

$$\left. \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2} \right|_{(x^0, t^0)} = \left. \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right|_{(x^0, t^0)} - \left. \frac{\partial^2 w_-(x,t)}{\partial x^2} \right|_{(x^0, t^0)} > 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right|_{(x^0, t^0)} > \left. \frac{\partial^2 w_-(x,t)}{\partial x^2} \right|_{(x^0, t^0)}.$$

Получаем:

$$\left. \begin{aligned} B(w(x,t)) - k \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + F_0(w(x,t)) \\ B(w_-(x^0, t^0)) = k \frac{\partial^2 w_-(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{(x^0, t^0)} + F_0(w_-(x,t)) \end{aligned} \right\} \Rightarrow B(w_-(x^0, t^0)) > B(w_-(x^0, t^0)).$$

С учетом неравенств (2) и (10), получаем:

$$\left. \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right|_{(x^0, t^0)} = B(w(x^0, t^0)) > B(w_-(x^0, t^0)) \geq \left. \frac{\partial w_-(x,t)}{\partial t} \right|_{(x^0, t^0)} \Rightarrow \left. \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right|_{(x^0, t^0)} > \left. \frac{\partial w_-(x,t)}{\partial t} \right|_{(x^0, t^0)}.$$

С другой стороны:

$$z(P^0) < z(P) \forall P \in D_{t_0} \Rightarrow \left. \frac{\partial z(x^0, t^0)}{\partial t} \right| \leq 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial w(x^0, t^0)}{\partial t} \right| \leq \left. \frac{\partial w_-(x^0, t^0)}{\partial t} \right|,$$

получили противоречие. Значит $t_0 = T$. Аналогично доказывается для $w_+(x,t)$.

Функции $w_-(x,t)$ и $w_+(x,t)$ называются, соответственно, нижним и верхним решением задачи (2)-(4), (6).

Единственность решения данной задачи вытекает из теоремы сравнения. Пусть существует два решения исходной задачи: $w_1(x,t)$ и $w_2(x,t)$ с одинаковыми граничными условиями. Пусть $w_+(x,t) = w_1(x,t)$, $w_-(x,t) = w_2(x,t)$. Тогда $w_1(x,t) \geq w_2(x,t)$. Если же взять $w_+(x,t) = w_2(x,t)$, $w_-(x,t) = w_1(x,t)$, то получим $w_1(x,t) \leq w_2(x,t)$. А значит, что $w_1(x,t) = w_2(x,t)$.

Одновременно будем рассматривать уравнение:

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + v(x,t), \tag{15}$$

$$v(x,t) \in C^{1,2}([0, T] \times \Omega) \cap C([0, T] \times \bar{\Omega}),$$

с такими же начальными:

$$v(x,0) = w_0(x,t) \geq 0, x \in \Omega \tag{16}$$

и граничными условиями:

$$\left. \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, t \in [0, T] \quad (17)$$

$$v(x,t) = 0, t \in [0, T]. \quad (18)$$

Исходя из теоремы сравнения, получаем, что $v(x,t)$, являющееся решением задачи (15)-(18), также является верхним решением задачи (2)-(4),(6).

Найдем $v(x,t)$. Заменой $v(x,t) = e^t u(x,t)$ от уравнения (15) придем к уравнению вида:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

с начальным условием:

$$u(x,0) = e^{-t} w_0(x)$$

и граничными условиями:

$$\left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, t \in [0, T],$$

$$u(X,t) = 0, t \in [0, T].$$

Решением этого уравнения является функция:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4kt}} e^{-t} w_0(\xi) d\xi.$$

Исходя из решения этого уравнения и теоремы сравнения, получим:

$$w(x,t) \leq v(x,t) = \frac{e^t}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4kt}} e^{-t} w_0(\xi) d\xi.$$

Из последнего неравенства можно найти такую зависимость между x и t , при которой плотность будет принимать половину своего максимального значения. Назовем эту зависимость глубиной проникновения волны. В силу принципа максимума, с учетом данных граничных и начальных условий получаем, что максимум плотности приходится на $x = 0$. Тогда из последнего неравенства можно оценить максимальную плотность w_{\max} , а затем оценить и глубину проникновения волны для каждого момента времени t .

Утверждение. Решение задачи Коши для уравнения (2) с начальной функцией

$$w(0,x) = \delta \theta^0(x), x \in R$$

асимптотически сходится к автомодельной функции $\theta^0(\xi)$ в следующем смысле: $\exists \xi_0 = const$ такая, что

$$w(t, \xi - \lambda_0 t) - \theta^0(\xi + \xi_0) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \text{ для } \forall \xi \in R.$$

Доказательство:

Рассмотрим функцию:

$$F(x,t) = \frac{w(x,t)}{1 + w(x,t)}.$$

Найдем такое δ , чтобы было выполнено неравенство $F(\delta w) \geq \delta F(w)$:

$$\frac{\delta w}{1 + \delta w} - \delta \frac{w}{1 + w} = \frac{\delta w^2(1 - \delta)}{(1 + w)(1 + \delta w)} \Rightarrow F(\delta w) - \delta F(w) \geq 0 \text{ при } \delta \in (0,1).$$

Зададим начальные условия: $w(x,0) = w_0(x) = \delta\theta^0(x), x \in R$. Перейдем от уравнения (2) к уравнению для функции $\theta(\xi, t) = w(t, \xi - \lambda_0 t)$:

$$\frac{\partial\theta(\xi, t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2\theta(\xi, t)}{\partial \xi^2} + \lambda_0 \frac{\partial\theta(\xi, t)}{\partial \xi} + F(\theta), t > 0, \xi \in R. \tag{19}$$

Начальное условие:

$$\theta_0(\xi) = \theta(\xi, 0) = w_0(x) = \delta\theta(x).$$

Граничные условия:

$$\left. \frac{\partial\theta(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, t \in [0, T],$$

$$\theta(X, t) = 0.$$

Проверим решение уравнения (19) на критичность, то есть на выполнение условия $\theta_t \geq 0$. Сделаем замену $z = \frac{\partial\theta(\xi, t)}{\partial t}$:

$$\frac{\partial z(\xi, t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 z(\xi, t)}{\partial \xi^2} + \lambda_0 \frac{\partial z(\xi, t)}{\partial \xi} + F'(\theta) \frac{\partial\theta(\xi, t)}{\partial t},$$

$$z(\xi, 0) = \left. \frac{\partial\theta(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=0}.$$

Если $z(\xi, 0) \geq 0$, то в силу принципа максимума $z(\xi, t) \geq 0$. Проверим это:

$$\left. \frac{\partial\theta(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = k \frac{\partial^2\theta_0(\xi, t)}{\partial \xi^2} + \lambda_0 \frac{\partial\theta_0(\xi, t)}{\partial \xi} + F(\theta_0) = \delta(k \frac{\partial^2\theta^0(\xi, t)}{\partial \xi^2} + \lambda_0 \frac{\partial\theta^0(\xi, t)}{\partial \xi}) + F(\delta\theta^0) =$$

$$= -\delta F(\theta^0) + F(\delta\theta^0) \geq 0.$$

Из последнего следует, что

$$z(\xi, t) = \frac{\partial\theta(\xi, t)}{\partial t} \geq 0,$$

то есть функция $\theta(\xi, t)$ является неубывающей по t .

Заметим, что, так как в начальный момент времени $\theta(\xi, 0) = \delta\theta^0(x)$ и $\delta \in (0,1)$, то в силу теоремы сравнения, получаем, что $\theta(\xi, t) \leq \theta^0(\xi)$.

Получаем, что функция $\theta(\xi, t)$ является неубывающей по t и, кроме того, ограничена сверху. А значит при $\forall \xi \in R$ существует предел. Получим, что

$$w(t, \xi - \lambda_0 t) - \theta^0(\xi + \xi_0) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \text{ для } \forall \xi \in R.$$

То есть, с течением времени форма волны не меняется.

Численное моделирование. При численном моделировании решения поставленной задачи было обнаружено, что в пакетном режиме происходило существенное искажение решения на границе области исследования. В связи с этим, была написана программа для численного решения задачи.

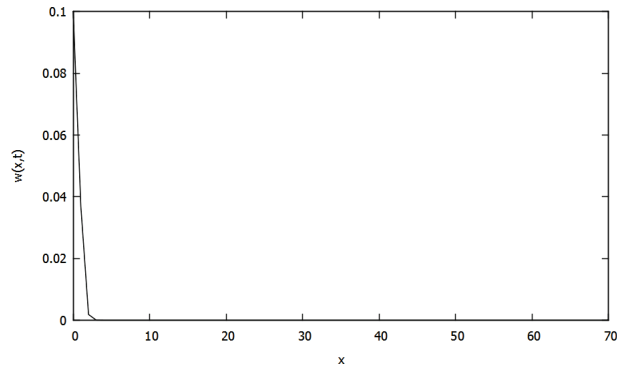


Рисунок 1. График функции $w(x,t)$ при $t = 0$

Аппроксимируем исходную задачу (2) с начальными условиями вида (3) и граничными (4),(6) разностной схемой. Введем в области в $D = \{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq X\}$ равномерную сетку с шагом h по координате и шагом τ по времени:

$$x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, Nh = X;$$

$$\tau_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, M, M\tau = T.$$

Выпишем явную схему для данного уравнения:

$$\frac{w_i^{j+1} - w_i^j}{\tau} = \frac{w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j}{h} + \frac{w_i^j}{1 + w_i^j} \Rightarrow w_i^{j+1} = \tau \left(\frac{w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j}{h} + \frac{w_i^j}{1 + w_i^j} \right) + w_i^j.$$

Начальные и граничные условия аппроксимируем следующим образом:

$$w_i^0 = w_0, i = 0, 1, \dots, N;$$

$$w_1^j - w_0^j = 0, j = 0, 1, \dots, M;$$

$$w_N^j = 0, j = 0, 1, \dots, M.$$

Данная схема является устойчивой при условии:

$$\tau \leq \frac{h^2}{2} \quad (20)$$

Из условия устойчивости получим, что при шаге по пространству $h=1$ следует, что $\tau = \frac{1}{2}$. На рисунке 1 предоставлен график начального распределения функции $w(x,t)$, а на рисунке 2 – графики самой функции $w(x,t)$ при разном значении t .

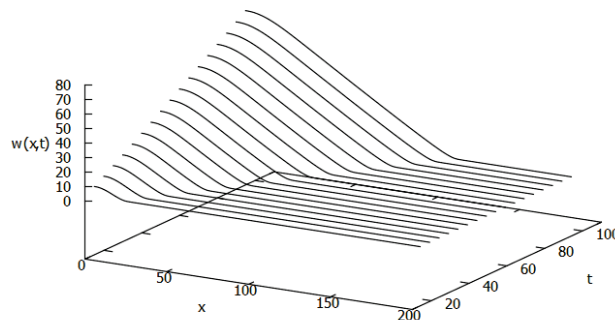


Рисунок 2. График функции $w(x,t)$

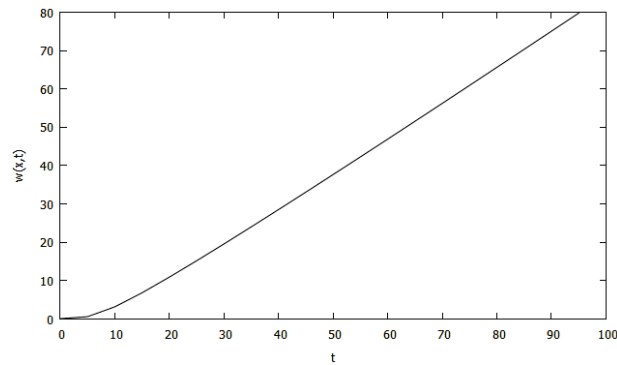


Рисунок 3. График функции $w(x,t)$ при $x = 0$

Из графиков видно, что с течением времени плотность вещества неограниченно увеличивается, то есть растет максимум исследуемой функции. Волна движется к правой границе, охватывая всю большую площадь. Так же можно заметить, что сама форма волны не меняется, как и доказывалось ранее.

На рисунке 3 представлен график поведения максимума решения в разные моменты времени. Из графика видно, что рост функции $w(x,t)$ при $x = 0$ в начальные моменты времени не является линейным. Однако при больших t рост становится линейным. В дальнейшем эта особенность будет доказана исходя из асимптотики решения.

Исследование поведения уравнения при больших и малых значениях функции $w(x,t)$

Исследуем теперь поведение решения задачи (2)-(4), (6) при малых плотностях. Рассмотрим свободный член

$$F(w) = \frac{w(x,t)}{1 + w(x,t)}.$$

При малых значениях $w(x,t)$ свободный член можно аппроксимировать следующим образом:

$$\frac{w(x,t)}{1 + w(x,t)} \approx w(x,t).$$

Следовательно, получим уравнение:

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + w(x,t) \tag{21}$$

Решением данного уравнения с учетом начальных условий (3) будет

$$w(x,t) = \frac{0.1 \cdot e^t \cdot e^{\frac{-x^2}{1+4t}}}{\sqrt{1+4t}}.$$

Из решения видно, что при малых значениях функции $w(x,t)$ у нее наблюдается экспоненциальный рост.

Теперь рассмотрим свободный член $F(w)$ при $w(x,t) \gg 1$. Его аппроксимация будет такой: $F(w) \approx 1$. В связи с этим будем решать уравнение:

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + 1. \tag{22}$$

Решением данного уравнения с учетом начальных условий (3) будет функция

$$w(x,t) = \frac{0.1 \cdot e^{\frac{-x^2}{1+4t}}}{\sqrt{1+4t}} + t.$$

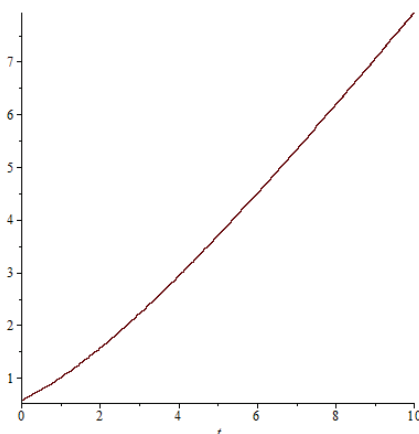


Рисунок 4. График функции (23)

При больших плотностях, то есть в самой волне, вторая производная мала (что можно наблюдать и при численном моделировании), и поэтому можно рассмотреть следующее уравнение:

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = \frac{w(x,t)}{1+w(x,t)}.$$

Решением данного уравнения будет функция, удовлетворяющая уравнению:

$$w(x,t) + \ln(w(x,t)) = t + C, \quad (23)$$

где C – некая константа. Построим график этой функции

Из графика видно, что функция имеет линейный рост. А значит, волна в области больших плотностей растет линейно.

Таким образом, была найдена асимптотика функции $w(x,t)$ при малых значениях функции и при фиксированных значениях x , но больших t .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследуется нелинейное параболическое уравнение с источником в виде функции Моно, которое часто используется при моделировании биологических популяций.

Было установлено, что у поставленной задачи существует единственное решение. Благодаря теореме сравнения, удалось оценить функцию сверху и доказать утверждение о том, что решение задачи Коши асимптотически сходится к автомодельной функции.

Для численного решения задачи была написана программа, реализующая разностную схему. Полученные графики доказали, что задача имеет решение типа бегущей волны и что форма волны с течением времени не изменяется.

Было исследовано поведение решения при больших и малых значениях функции. Доказано, что при малых значениях функции решение имеет экспоненциальную скорость. Фактически, была найдена асимптотика по временной и пространственной переменной.

Список литературы / References:

1. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. *Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения*. М.: Физматлит, 2002, 432 с. [Polyanin A.D., Zaicev V.F. *Handbook of nonlinear equations of mathematical physics: exact solutions*. Moscow: Fizmatlit, 2002, 432 p. (In Russ.)]
2. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*. М.: Наука, 1987, 480 с. [Samarski A.A., Galaktionov V.A., Kurdumov S.P., Mihailov A.P. *Regimes with aggravation in the problems for parabolic equations quasilinear*. Moscow: Science, 1987, 480 p. (In Russ.)]
3. Колобов А.В., Анашкина А.А., Губернов В.В., Полежаев А.А. Математическая модель роста опухоли с учетом дихотомии миграции и пролиферации. *Компьютерные исследования и моделирование*, 2009, т. 1, № 4, с. 415-422. [Kolobov A.V., Anashkin A.A., Gubernev V.V., Polezhev A.A. Mathematical model of tumor growth taking into account the dichotomy of migration and proliferation. *Computer research and modeling*, vol. 1, no. 4, pp. 415-422, 2009 (In Russ.)]
4. Буляница А.Л., Курочкин В. Е. Исследование процессов упорядочивания в открытых системах (на примере эволюции колонии несовершенных мицелиальных грибов). *Научное приборостроение*, 2000, т. 10,

№ 2, с. 43-49. [Bulyanica A.L., Kurochkin V.E. Research of processes of ordering in open systems (on the example of the evolution of colonies of imperfect mycelial fungi). *Scientific instrument manufacturing*, 2000, vol. 10, no. 2, pp 43-49. (In Russ.)]

5. Idiyatullina A.R., Vodopyanova L.L., Vodopyanov V.V. Mathematical Modelling of the Micromicetes Colonies Growth Applying the Diffusion Equation. *Advances in Microbiology*, 2013, no. 3, pp. 7-10.

6. Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме. *Бюллет. МГУ*, 1937, т. 1, № 6, с. 1-26. [Kolmogorov A.N, Petrovskii I.G, Piskunov N.S. Investigation of the diffusion equation connected with the increase in the amount of substance and its application to one biological problem. *Bulletin MSU*, vol. 1, no. 6, pp. 1-26, 1937 (In Russ.)]

7. Takasi K. On the maximum principle for quasi-linear parabolic equations of the second order. *Proc. Japan Acad.*, 1963, vol. 39, no. 4, pp. 211-216.

THE STUDY OF NONLINEAR PARABOLIC EQUATIONS WITH KINETICS OF THE TYPE MONO

Dusaeva Ya.M.¹, Vodopyanov V.V.²

Ufa State Aviation Technical University

K. Marx str., 12, Ufa, 450008, Russia; e-mail: ¹yanadusaeva@mail.ru, ²vodop@yandex.ru

Abstract. This article is about study of the Fisher-KPP type equation with a special right-hand side in the form of Mono function. This type of equation is often used in the modeling of biological systems, for example, in the system of equations describing the growth of tumor cells. Despite the large number of works devoted to the study of this type equation with different sources, this type of source is rarely found in studies. Mono function occurs when it comes to biological populations, which can react only when adsorption, as well as in many other cases. The aim of this work is to research this type of equations. For assigned task, the comparison theorem and the theorem of the constancy of the wave form in time were proved, and the behavior of the solution of the equation in the neighborhood of zero and infinity was found. The results of the analytical solution were confirmed by numerical solution.

Key words: KPP equation, Mono kinetics, nonlinear parabolic equation, comparison theorem, models of biological systems, numeric modeling, traveling wave type solution.