МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ КРУПНЫХ КРОВЕНОСНЫХ СОСУДОВ

Клочков Б.Н.
Институт прикладной физики РАН
ул. Ульянова, 46, г. Нижний Новгород, 603950, РФ; e-mail: klochkovbn@gmail.com
Поступила в редакцию: 11.07.2020

Аннотация. Проведен анализ распределенных колебаний упругого сосуда с протекающей в нем кровью и рассмотрены условия существования динамических эффектов. Получены дисперсионные характеристики волновых процессов. Показана возможность существования фиксированных структур, описаны условия возникновения неустойчивости.
Ключевые слова: упругий сосуд с жидкостью, характерные скорости течения, неустойчивость, структуры, математическое моделирование.

Кроме транспортной функции кровеносных сосудов в них могут происходить волновые и колебательные процессы, статические изменения формы, параметры которых могут служить диагностике состояния сосудистой системы [1-8]. При этом существенным является построение адекватной математической модели распределенных движений крови в отдельном сосуде с учетом накопленного экспериментального материала. Кровеносные сосуды в экспериментальных условиях часто моделируются мягкими упругими трубками, через которые прокачивается жидкость. При превышении скоростью потока некоторого критического значения наблюдались осцилляции трубки. Имеют место сосредоточенные и распределенные гидродинамические модели течения крови в сосудах конечной длины.

Рассмотрим волновые и колебательные процессы в системе сосуд–кровь и исследуем их параметры. Используем математическую модель сосуда с учетом упругости сосудистого русла, скорости потока жидкости. Движение стенки сосуда описываем уравнениями тонкостенной оболочки [9]. Материал стенки считаем несжимаемым. Пренебрегаем продольными и угловыми смещениями элемента оболочки по сравнению с радиальными. Это связано с функциональной спецификой сосудов в живом организме. Сосуд достаточно жестко закреплен в ткани в осевом и азимутальном направлениях с целью экономии энергетических ресурсов. Практически перемещения стенки сосуда осуществляются лишь радиально под действием давления, что вполне достаточно для изменения внутреннего просвета сосуда, в частности, для регуляции кровоснабжения тканей и органов. Уравнение движения элемента стенки в цилиндрических координатах имеет вид:

$$\frac{Eh^3}{9}\left(\frac{\partial^4 R}{\partial x^4}+\frac{2}{R_0^2}\frac{\partial^4 R}{\partial x^2\partial\theta^2}+\frac{1}{R_0^4}\frac{\partial^4 R}{\partial\theta^4}\right)+\frac{4EhR}{3R_0^2}=P-\rho h\frac{\partial^2 R}{\partial t^2}, \tag{1}$$

где t – время; x – продольная, θ – азимутальная координаты; E – модуль упругости материала стенки сосуда; h – толщина стенки; R – текущее изменение радиуса, R_0 – недеформированный радиус; P – текущее изменение внутреннего давления; ρ – плотность материала стенки. В стенку сосуда могут входить гладкомышечные волокна и параметр E может меняться как в сторону увеличения, так и уменьшения в зависимости от уровня активации волокон.

Уравнение для давления P в (1) следует из анализа гидродинамических уравнений [9]. Считаем кровь несжимаемой. Векторная скорость крови $\boldsymbol{V}=\nabla\varphi+\boldsymbol{U}$, где φ – потенциал скоростей, $\boldsymbol{U}$ – постоянная составляющая скорости. Используем уравнение Лапласа для потенциала скоростей, граничное условие непроницаемости на внутренней поверхности сосуда стенка–кровь, интеграл Коши–Лагранжа (ρ_f– плотность крови). Решая уравнение Лапласа в виде $\varphi = f(r)\times\exp[i(\Omega t-kx-n\theta)]$, где Ω – частота, k – волновое число, n – номер азимутальной моды, получим модифицированное уравнение Бесселя для $f(r)$. Его ограниченное решение представляется в виде модифицированной функции Бесселя первого рода I_n с точностью до постоянного множителя: $f(r)\sim I_n(kr)$. Из условия непроницаемости на стенке следует выражение для давления, причем $\alpha=kR_0$, ($'$) – производная:

$$P=-\rho_f R_0\Phi(\alpha,n)\left(\frac{\partial^2 R}{\partial t^2}+2U\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial t}+U^2\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}\right),\ \Phi(\alpha,n)=\frac{I_n(\alpha)}{\alpha I_n'(\alpha)}. \tag{2}$$

Анализ линейной стадии важен для биососудов, поскольку позволяет получить необходимые аналитические выражения и их зависимости от параметров рассматриваемой системы. Сделаем преобразования, переходя к безразмерным: частоте $\zeta=\Omega R_0/c$, волновому числу $\alpha=kR_0$ и другим параметрам. Приходим к искомому дисперсионному уравнению, причем $\rho\approx\rho_f$:

$$[1+\varepsilon(\alpha,n)]\zeta^2-2\varepsilon(\alpha,n)\alpha W\zeta+\varepsilon(\alpha,n)\alpha^2W^2-\delta(\alpha^2+n^2)^2-1=0, \tag{3}$$

$$\varepsilon(\alpha,n)=\frac{1}{q}\Phi(\alpha,n),\ q=\frac{h}{R_0},\ \delta=\frac{q^2}{12},\ W=\frac{U}{c},\ c=\sqrt{\frac{4E}{3\rho}}. \quad (4)$$

Решение квадратного уравнения (3) с выражениями (4) имеет два корня:

$$\zeta(\alpha,n)=\frac{\varepsilon(\alpha,n)\alpha W}{1+\varepsilon(\alpha,n)}\pm\sqrt{N(\alpha,n)},\ N(\alpha,n)=-\frac{\varepsilon(\alpha,n)(\alpha W)^2}{[1+\varepsilon(\alpha,n)]^2}+\frac{\delta(\alpha^2+n^2)^2+1}{1+\varepsilon(\alpha,n)}. \quad (5)$$

Полученные решения описывают колебательные эффекты изменения просвета сосуда в распределенной модели упругого сосуда с кровью, подобной артерии, вене или другому сосуду, причем знак (+) соответствует устойчивой ветви, а знак (–) – неустойчивой. При возникновении неустойчивости (N<0) частота нарастающих колебаний Reζ линейно растет со скоростью потока W, что соответствует экспериментальным данным. При определенных условиях возможны неподвижные структуры. В качестве основного параметра возьмем гидродинамический – скорость жидкости размерная U или безразмерная W. Существуют по крайней мере две характерные скорости, приводящие к существенным эффектам.

Во–первых, получим выражение для критической скорости потока жидкости U_{cr} и частоты колебаний Ω_{cr} при возникновении неустойчивости в трубке с жидкостью в случае $N\le0$ при $U\ge U_{cr}$. Это – проявление неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. При этом размерная критическая скорость потока U_{cr}, когда N=0, равна:

$$U_{cr}(\alpha,n)=c\sqrt{\frac{1+\delta(n^2+\alpha^2)^2}{\alpha^2\varepsilon(\alpha,n)}[1+\varepsilon(\alpha,n)]}. \quad (6)$$

Величина U_{cr} (6) монотонно растет с ростом продольного натяжения и окружного натяжения (при их учете), а также с ростом модуля упругости Юнга E и толщины стенки сосуда h. Безразмерная критическая скорость $W_{cr}(\alpha,n)$ при пренебрежении продольным и окружным постоянными натяжениями, а также с учетом близких значений плотностей протекающей крови и материала стенки сосуда имеет упрощенный вид. Характерной особенностью этой зависимости является то, что $W_{cr}(\alpha,n)$ определяется в основном только одним параметром q (относительная толщина стенки сосуда) и растет с ним, а она же размерная $U_{cr}(\alpha,n)$ – еще и упругостью материала стенки E. В частном случае n=0 и $\alpha\ll1$ можно получить, что $W_{cr}(\alpha,0)\approx1/\alpha$. При $U=U_{cr}$ имеем критическую частоту осцилляций в безразмерном виде:

$$\zeta_{cr}(\alpha,n)=\sqrt{\frac{12+q^2(n^2+\alpha^2)^2}{12}\cdot\frac{\Phi(\alpha,n)}{q+\Phi(\alpha,n)}}. \quad (7)$$

Минимальные частоты соответствуют длинам волн $\lambda^{cr}_{\min}\approx(2\div3)R_0$. При n=0 и $\alpha\ll1$ получаем, что $\zeta_{cr}(\alpha,0)\approx1$. Дисперсионные зависимости в комплексном виде можно представить как $\zeta(\alpha,n)=\mathrm{Re}\zeta(\alpha,n)+i\mathrm{Im}\zeta(\alpha,n)$. Неустойчивость имеет место в некотором диапазоне волновых чисел $\alpha_1\le\alpha\le\alpha_2$, причем $N(\alpha_{1,2},n)=0$. При этом длина волны в этой области лежит в пределах $\lambda_{1,2}\approx R_0\div1.4R_0$. При увеличении номера моды n при фиксированных остальных параметрах характер зависимостей сохраняется, но область неустойчивости сужается, величины инкремента и декремента уменьшаются, причем в дальнейшем неустойчивая и затухающая мнимые ветви обращаются в нуль, а частотные действительные ветви становятся непересекающимися. Выражение для инкремента колебаний при $W>W_{cr}$ имеет вид: $\mathrm{Incr}(\alpha,n)=\mathrm{Im}[\zeta(\alpha,n)]=\sqrt{-N(\alpha,n)}$, откуда видно, что Incr(α,n) растет монотонно с увеличением скорости потока крови W.

Во–вторых, рассмотрим случай нулевой скорости распространения волны или, что тоже самое, случай нулевой частоты $\zeta(\alpha,n)$=0. При $C(\alpha,n)$=0, остановившаяся волна, инкремент и декремент – тоже нулевые, существует эффект статики. Здесь возможны: редкая, пространственно низкочастотная гофра для $n\ge1$ и частая, пространственно высокочастотная гофра для $n\ge0$. Получаем выражение для своеобразной безразмерной критической скорости структурирования W_{0cr} достижения стоячей гофры:

$$W_{0cr}=\sqrt{q\frac{12+q^2(n^2+\alpha^2)^2}{12\alpha^2\Phi(\alpha,n)}}. \quad (8)$$

Критическая скорость кровотока W_{0cr} (8) для остановленных мод меньше, чем критическая скорость возникновения неустойчивости W_{cr} для неустойчивых мод: $W_{cr}=W_{0cr}\sqrt{1+\varepsilon(\alpha,n)}$ примерно в 2 раза по минимуму, то есть в реальности легче получить фиксированную извитость сосуда, чем его колебания. В приближении α«1 и при n=0 получаем выражение для $W_{0cr}\approx\sqrt{q/2}$.

В–третьих, существует зависимость безразмерной фазовой скорости распространения возмущений от безразмерного волнового числа α и номера моды n:

$$C(\alpha,n)=\mathrm{Re}\zeta(\alpha,n)/\alpha. \tag{9}$$

Это – обобщение частного случая формулы Юнга–Моенса–Кортевега для скорости пульсовой волны. При этом для реальной пульсовой волны ее длина сравнима с размером тела из–за достаточно низкой частоты сердечного пульса, однако для вынужденного волнового воздействия частоту можно увеличить. Из полученной формулы в длинноволновом приближении α«1 следует простое бездисперсионное выражение для размерной скорости распространения пульса при W=n=0:

$$C_0=\sqrt{2hE/(3R_0\rho_f)}\,. \tag{10}$$

В нормальных условиях скорость течения крови в крупных артериях может достигать 1,5÷2,9 м/с, а при некоторых патологиях может значительно увеличиваться [3-6]. Кроме того, существуют заболевания, связанные с уменьшением модуля Юнга материала стенки сосуда, что приводит к снижению критической скорости U_{cr}. Максимальная скорость крови в крупных венах может составлять 0,5 м/с. Частоты звуковых колебательных эффектов в системе сосуд–кровь составляют 25-500 Гц [3, 4]. Необходимо различать условия содержания сосуда, у сосудистых препаратов из-за их физико-химической обработки значения модуля упругости E могут существенно превышать соответствующие в живом действующем состоянии. В [3, 10, 11] приведены довольно низкие значения модуля упругости $E\cong10^2\div5\times10^4$ Н/м^2. Вместе с этим существуют и данные значительно большие приведенных. Характерные значения радиуса для рассматриваемых сосудов лежат в пределах $(0{,}1\div1{,}2)\times10^{-2}$ м. Критические скорости существенно падают с уменьшением q, минимальные значения составляют $q\cong0{,}02\div0{,}04$. Измеренная скорость распространения пульсовой волны составляет: 4÷14 м/с для крупных артериальных сосудов и 1÷2 м/с для крупных венозных сосудов [5, 6].

Оценки можно сделать при помощи полученных в настоящей статье формул и выражений для нулевой моды n=0 и нулевых продольных и азимутальных напряжениях, близких значениях плотностей крови и водоподобной ткани стенки сосуда $\rho\approx\rho_f\approx1000$ кг/м^3. Так, при q=0,02, $E=4\times10^3$ Н/м^2, $R_0=3\times10^{-3}$м минимальная критическая скорость неустойчивости равна U_{cr}=0,28 м/с согласно формуле (6), соответствующая частота $f_{cr}=\Omega_{cr}/2\pi$=153 Гц (7), минимальная критическая скорость структурирования U_{0cr}=0,12 м/с (8). Оценка скорости пульса в области устойчивости согласно формуле (9) при q=0,04, $E=5\times10^4$ Н/м^2, U=0,1 м/с, α=0,1 составляет C=1,25 м/с.

Сделанные оценки показывают правдоподобность результатов для венозных и артериальных сосудов в норме и при ряде патологий. Заметим, что в живом организме может происходить прорастание ткани, прорастающие деформации, и этот более медленный процесс может взаимодействовать с динамикой системы сосуд–кровь, «закреплять» статическую извитость. Когда сосуды прямые и чистые, то это хорошо с точки зрения кровоснабжения, а любой изгиб, извитость сосуда может привести к дальнейшим нарушениям гидродинамики и прочим патологическим процессам [12, 13]. Представлен линейный волновой подход к проблеме динамической биомеханики сосудов. Получены дисперсионные характеристики и выражение для частоты колебаний. Выведены формулы для двух критических скоростей тока крови: для структурирования сосуда и для его неустойчивости. Проведенные для крупных кровеносных сосудов оценки показывают возможность возникновения в них как статического и квазистатического режима (малые частоты), так и режима колебаний (относительно высокочастотные вибрации). Критические скорости кровотока могут достигаться для вен в обычных условиях, а для артерий – при функциональных или диагностических сдавливаниях, а также при патологии, характеризующейся значительно большей, чем в обычных условиях, скоростью течения крови, либо меньшей упругостью сосуда.

Работа выполнена в рамках Госзадания ИПФ РАН, проект № 0035-2014-0008.

Список литературы / References:

1. Cancelli C., Pedley T.J. A separated-flow model for collapsible-tube oscillations. *J. Fluid. Mech.*, 1985, vol. 157, pp. 375-404.

2. Gavriely N., Shee T.R., Cugell D.W., Grotberg J.B. Flutter in flow-limited collapsible tubes: a mechanism for generation of wheezes. *J. Appl. Physiol.*, 1989, vol. 66, no. 5, pp. 2251-2261.

3. Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У. *Механика кровообращения*. М.: Мир, 1981, 642 с. [Caro C.G., Pedley T.J., Schroter R.C., Seed W.A. *The mechanics of the circulation.* Oxford: Oxford University Press, 1978. (In Russ.)]

4. Педли Т. *Гидродинамика крупных кровеносных сосудов*. М.: Мир, 1983, 400 с. [Pedley T.J. *The fluid mechanics of large blood vessels.* Cambridge: Cambridge University Press, 1980. (In Russ.)]

5. *Физиология кровообращения: физиология сосудистой системы*. *Руководство по физиологии*. Л.: Наука, 1984, 656 с. [*Circulation physiology: vessel system physiology. Guide on physiology.* L.: Nauka, 1984, 656 p. (In Russ.)]

6. *Физиология человека.* Под ред. Шмидта Р., Тевса Г. М.: Мир, 1986, т. 3, 288 с. [*Human physiology.* Ed. Schmidt R.F., Thews G. Berlin: Springer-Verlag, 1983. (In Russ.)]

7. Griffiths D.J. Oscillations in the outflow from a collapsible tube. *Med. Biol. Engng. and Comput.*, 1977, vol. 15, no. 4, pp. 357-362.

8. Brower R.W., Scholten C. Experimental evidence on the mechanism for the instability of flow in collapsible vessels. *Med. Biol. Engng.*, 1975, vol. 13, no. 6, pp. 839-845

9. Вольмир А.С. *Оболочки в потоке жидкости и газа: задачи гидроупругости*. М.: Наука, 1979, 320 с. [Volmir A.S. *Shells in flow of liquid and gas: problems of fluid–elasticity*. M.: Nauka, 1979, 320 p. (In Russ.)]

10. Ohhashi T., Azuma T., Sakaguchi M. Active and passive mechanical characteristics of bovine mesenteric lymphatics. *Amer. J. Physiol.*, 1980, vol. 239, pp. H88-H95.

11. Березовский В.А., Колотилов Н.Н. *Биофизические характеристики тканей человека*. *Справочник*. Киев: Наук. Думка, 1990, 224 с. [Berezovsky V.A., Kolotilov N.N. *Human tissues biophysical characteristics. Handbook.* Kiev: Nauk. Dumka, 1990, 224 p. (In Russ.)]

12. Клочков Б.Н., Кузнецова Е.А. Нелинейные режимы изменения формы упругой трубки с потоком жидкости в ней. *Изв. АН. Механика жидкости газа*, 2000, № 4, с. 46-55 [Klochkov B.N., Kuznetsova E.A. Nonlinear regimes of variation of the shape of a collapsible tube containing a flowing fluid. *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Zhidk. Gaza*, 2000, no. 4, p. 46-55. (In Russ.)]

13. Клочков Б.Н., Елисеева Ю.Ю., Шилягин П.А. Распространение низкочастотных волн в биологических тканях и сосудах. *Акустический журнал*, 2009, т. 55, № 4-5, с. 506-515 [Klochkov B.N., Eliseeva Yu.Yu., Shilyagin P.A. Propagation of low–frequency waves in biological tissues and vessels. *Akust. Zh.*, 2009, vol. 55, no. 4-5, p. 506-515. (In Russ.)]

MODELING OF DYNAMICS IN LARGE BLOOD VESSELS

Klochkov B.N.
Applied Physics Institute, Russian Academy of Sciences
Ulynova str., 46, Nizhny Novgorod, 603950, Russia; e-mail: klochkovbn@gmail.com

Abstract. Analyse of distributed oscillations of soft elastic vessel with blood flow in it is supplied and conditions of dynamic effects existence are considered. Dispersion characteristics of wave processes are given. The possibility of the existence of fixed structures is shown, conditions of instability rise are described.
Key words: elastic vessel with fluid, characteristic velocities of stream, instability, structures, mathematical modeling.